

Федеральное государственное  
образовательное бюджетное учреждение  
высшего профессионального образования  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»  
Кафедра прикладной математики

**В. И. Соловьев**

# **М**ЕТОДЫ **ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**

Учебное пособие

*Рекомендовано*

*Ученым советом факультета математических методов и анализа рисков  
в качестве учебного пособия  
для подготовки бакалавров экономики и менеджмента*

Москва • 2012

УДК 519.2 (075.8)  
ББК 22.1я73  
С60

***Рецензенты:***

канд. техн. наук, проф. *В. Н. Калинина*  
(Государственный университет управления)  
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. М. Гончаренко*  
(Финансовый университет)

**С60      Соловьев В. И.** Методы оптимальных решений: Учебное пособие.  
М.: Финансовый университет, 2012. 364 с.  
ISBN 978-5-7942-XXXX-X

Рассматривается теория и практика применения методов линейного, нелинейного и динамического программирования, многокритериальной оптимизации, оптимального управления, теории графов и теории игр в качестве инструмента поддержки принятия решений в экономике. Применение методов иллюстрируется конкретными примерами обоснования решений по планированию производства, управлению запасами и цепями поставок, изучению потребительского спроса, рыночного равновесия, конкуренции, управлению экономикой на макроуровне. В частности, в качестве приложений методов оптимального управления и теории игр излагаются собственные результаты автора по экономике рынка информационных технологий.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров по направлениям «Экономика» и «Менеджмент». Может быть полезно студентам, обучающимся по направлению подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика», магистрантам, аспирантам, преподавателям и научным работникам.

УДК 519.2 (075.8)  
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7942-XXXX-X

© В. И. Соловьев, 2012  
© Финуниверситет, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>Введение .....</b>	<b>8</b>
<b>ГЛАВА 1. Оптимальные решения в задачах планирования производства.....</b>	<b>14</b>
§ 1.1. Производственная функция.....	14
§ 1.2. Модель поведения производителя.....	17
§ 1.3. Модели налогообложения .....	20
§ 1.4. Модель управления запасами.....	25
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>27</i>
<b>ГЛАВА 2. Элементы линейной алгебры и балансовые модели экономики.....</b>	<b>29</b>
§ 2.1. Векторы и матрицы .....	29
§ 2.2. Линейные пространства.....	45
§ 2.3. Системы линейных алгебраических уравнений.....	56
§ 2.4. Неотрицательные решения систем линейных алгебраических уравнений ...	65
§ 2.5. Обратная матрица.....	68
§ 2.6. Обращенный базис системы линейных алгебраических уравнений.....	72
§ 2.7. Модель межотраслевого баланса .....	74
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>78</i>
<b>ГЛАВА 3. Методы линейного программирования .....</b>	<b>79</b>
§ 3.1. Постановка задачи линейного программирования .....	79
§ 3.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования.....	81
§ 3.3. Метод искусственного базиса .....	92
§ 3.4. Теория двойственности в линейном программировании .....	96
§ 3.5. Двойственный симплексный метод.....	109
§ 3.6. Задачи целочисленного программирования .....	112
§ 3.7. Решение задач линейного программирования в пакете Microsoft Excel ....	116
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>120</i>
<b>ГЛАВА 4. Оптимальные решения в линейных задачах управления производством и цепями поставок.....</b>	<b>122</b>
§ 4.1. Линейная задача планирования производства .....	122
§ 4.2. Задача о расшивке узких мест производства.....	126
§ 4.3. Транспортная задача .....	132
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>150</i>
<b>ГЛАВА 5. Методы нелинейного программирования .....</b>	<b>152</b>
§ 5.1. Постановка задачи выпуклого программирования.....	152
§ 5.2. Условия Каруша — Куна — Таккера .....	153
§ 5.3. Метод возможных направлений .....	158
§ 5.4. Метод условного градиента .....	169
§ 5.5. Метод штрафных функций.....	175
§ 5.6. Решение задач нелинейного программирования в пакете Microsoft Excel...	180
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>183</i>

## **ГЛАВА 6. Оптимальные решения**

### **в задачах изучения потребительского спроса .....184**

- § 6.1. Бюджетное множество и функции полезности ..... 184
- § 6.2. Предпочтения потребителя и функция полезности ..... 186
- § 6.3. Модель поведения потребителя ..... 191
- § 6.4. Уравнение Слуцкого ..... 196
- § 6.5. Модель рыночного равновесия ..... 203
- Контрольные вопросы и задания* ..... 207

## **ГЛАВА 7. Задачи динамического программирования в экономике.....209**

- § 7.1. Постановка задачи динамического программирования ..... 209
- § 7.2. Задача оптимального распределения инвестиций ..... 210
- § 7.3. Многошаговая задача управления производством и запасами..... 214
- § 7.4. Дискретные модели ценообразования опционов ..... 223
- Контрольные вопросы и задания* ..... 234

## **ГЛАВА 8. Теория графов и ее экономические приложения.....236**

- § 8.1. Графы..... 236
- § 8.2. Задачи о кратчайшем и критическом пути ..... 237
- § 8.3. Потoki в сетях ..... 241
- Контрольные вопросы и задания* ..... 251

## **ГЛАВА 9. Задачи многокритериальной оптимизации в экономике .....253**

- § 9.1. Постановка задачи многокритериальной оптимизации ..... 253
- § 9.2. Оптимальность по Парето ..... 254
- § 9.3. Субоптимизация ..... 258
- § 9.4. Лексикографическая оптимизация ..... 259
- § 9.5. Свертка критериев..... 259
- § 9.6. Метод идеальной точки ..... 260
- § 9.7. Метод последовательных уступок..... 262
- Контрольные вопросы и задания* ..... 264

## **ГЛАВА 10. Теория игр и ее экономические приложения .....266**

- § 10.1. Матричные игры..... 266
- § 10.2. Принятие решений в условиях неопределенности ..... 279
- § 10.3. Биматричные игры ..... 285
- § 10.4. Непрерывные игры..... 297
- § 10.5. Позиционные игры..... 299
- Контрольные вопросы и задания* ..... 307

## **ГЛАВА 11. Моделирование поведения фирм на конкурентных рынках .....311**

- § 11.1. Модель поведения двух производителей на рынке одного товара ..... 311
- § 11.2. Стратегии поведения дуополистов ..... 313
- § 11.3. Модели несовершенной и совершенной конкуренции..... 323
- § 11.4. Модели конкуренции на рынке информационных технологий..... 325
- Контрольные вопросы и задания* ..... 334

## **ГЛАВА 12. Теория оптимального управления**

### **и ее экономические приложения .....335**

- § 12.1. Постановка задачи оптимального управления ..... 335
- § 12.2. Принцип максимума Понтрягина ..... 336
- § 12.3. Моделирование оптимального экономического роста..... 341
- § 12.4. Моделирование динамики взаимодействия разработчиков  
коммерческого и некоммерческого программного обеспечения ..... 350
- Контрольные вопросы и задания* ..... 361

## **Рекомендуемая литература .....363**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие подготовлено в соответствии с действующими Федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по направлениям подготовки бакалавров «Экономика» (дисциплина «Методы оптимальных решений») и «Менеджмент» (дисциплина «Методы принятия управленческих решений»). Также во внимание принимался Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика».

Цель пособия — дать студентам знания и навыки применения математических методов оптимизации и исследования операций в качестве инструмента поддержки принятия экономических решений.

Пособие состоит из двенадцати глав, охватывающих классические методы оптимизации, методы линейной алгебры, линейного, нелинейного и динамического программирования, оптимального управления, многокритериальной оптимизации, теории графов и теории игр.

Обсуждение каждой темы начинается с доступного изложения основных идей соответствующего метода, которое подкрепляется достаточно строгим математическим обоснованием и большим числом иллюстраций применения в конкретных задачах принятия решений.

Экономические приложения математических методов выходят в данной книге на первый план, серьезный акцент делается не только на методы решения задач, но и на построение математических моделей, анализ и экономическую интерпретацию полученных результатов.

Пособие знакомит студента с основными проблемами экономики и управления, при решении которых полезно применение математических методов и моделей: приводятся примеры обоснования решений по планированию производства, управлению запасами и цепями поставок, изучению потребительского спроса, рыночного равновесия и конкуренции, управлению экономикой на макроуровне.

Освоение пособия помогает студенту научиться ориентироваться в математических методах, чтобы уметь самому сформулировать задачу, перейти от ее экономической постановки к математической модели, провести анализ модели, доведя их до конкретных количественных результатов и

содержательной интерпретации. Естественно, в пособии обсуждаются и границы применимости математических методов в экономической науке и практике, математические методы рассматриваются не как единственное средство принятия экономических и управленческих решений, а как инструмент поддержки принятия таких решений.

Книга основана на многолетнем опыте автора в преподавании математических методов оптимизации и исследования операций будущим экономистам, менеджерам, а также специалистам по прикладной математике, информатике и применению математических методов в экономике. Она имеет ряд особенностей, отличающих ее от похожих книг, изданных в последнее время.

Во-первых, пособие является в определенном смысле самодостаточным: для его освоения студенту необходимо владеть (помимо арифметики, элементарной алгебры и основ экономики) лишь классическим дифференциальным исчислением, весь остальной необходимый математический аппарат вводится в нужном объеме по мере необходимости. В частности, это относится к методам линейной алгебры: серьезное внимание уделено методу Жордана — Гаусса и его вычислительной реализации.

Во-вторых, систематизирована система обозначений. Так, все оптимизационные задачи формулируются в виде задач на максимум, а если в задаче присутствуют ограничения — неравенства, то они имеют вид « $\leq$ »; оптимальные решения всех задач обозначаются верхним индексом «\*»; двойственные оценки в линейном программировании, множители Лагранжа в нелинейном программировании, сопряженные переменные в оптимальном управлении обозначаются одной и той же буквой **y**, чтобы подчеркнуть их общую природу. Точно так же управления в задачах динамического программирования и оптимального управления обозначаются одной и той же буквой **u**.

В-третьих, все рассматриваемые методы иллюстрируются доведенными до числовых результатов и содержательной интерпретации практическими примерами из экономики и управления, при этом задачи решаются не только с помощью ручных вычислений, но и с применением средств пакета Microsoft Excel.

В-четвертых, достаточно подробно по сравнению с другими пособиями излагаются и иллюстрируются практическими примерами методы нелинейного программирования и многокритериальной оптимизации. Изложение теории игр также не ограничивается матричными играми: обсуждаются неантагонистические некооперативные и кооперативные игры, в том числе многошаговые и непрерывные.

В-пятых, доступным языком изложено применение динамического программирования к оценке американских опционов — ни в одном из известных автору пособий на русском языке такого изложения нет.

В-шестых, в данном пособии динамическое программирование рассматривается только в применении к дискретным процессам, а в качестве ме-

тогда решения непрерывных задач оптимального управления излагается принцип максимума Понтрягина (с доказательством и примерами применения).

Наконец, в-седьмых, автор адаптирует для студентов результаты собственных исследований по экономике рынка информационных технологий и излагает их в качестве примеров приложений теории игр и оптимального управления.

Для удобства читателей в каждой главе теоремы, другие важные утверждения и примеры имеют выделенное шрифтовое оформление, конец доказательства или решения обозначается знаком «□». Теоремы в книге не нумеруются, а рисунки, таблицы и формулы имеют трехступенчатую нумерацию: номер главы, номер параграфа, номер рисунка, таблицы или формулы. В конце каждой главы приводятся контрольные вопросы для самопроверки и задачи для решения на практических занятиях и самостоятельной работы.

Книга достаточно насыщена материалом, и преподаватель может по своему усмотрению выбирать необходимое для изучения подмножество. Это же обстоятельство позволяет использовать пособие в качестве математической поддержки дисциплин по выбору для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Бизнес-информатика» и др. Кроме того, автор надеется, что часть материала, связанная с моделированием конкуренции на рынках интеллектуальных товаров, будет полезна при написании выпускных квалификационных работ, в том числе магистерских и кандидатских диссертаций.

Автор будет благодарен читателям за отзывы, советы и предложения по поводу данной книги, которые просит направлять по электронному адресу [visoloviev@ya.ru](mailto:visoloviev@ya.ru).

## ВВЕДЕНИЕ

Человеческая деятельность связана с принятием множества решений по способам достижения поставленных целей. При принятии решений приходится учитывать много факторов, отметим среди таких факторов, в первую очередь, ограниченность ресурсов, неопределенность внешних условий, присутствие конкурирующих сторон, которые стремятся достичь своих целей, не всегда совпадающих с нашими.

Как известно, экономика занимается изучением того, как в обществе распределяются **о г р а н и ч е н н ы е   р е с у р с ы**. Как правило, у экономической системы (семьи, фирмы, государства) есть некоторая **ц е л ь**, но на пути к достижению этой цели стоят **о г р а н и ч е н и я** по количеству используемых ресурсов. Рассмотрим пример **задачи планирования производства**.

**ПРИМЕР В.1.** Предприятие производит продукцию двух видов (А и Б), используя при изготовлении этой продукции ресурсы трех видов (первого, второго и третьего). Чтобы произвести одну единицу продукции А, нужно затратить по 1 единице первого и второго ресурсов и 2 единицы третьего ресурса. Для производства единицы продукции Б требуется 2 единицы первого ресурса и 1 единица второго ресурса. Запасы ресурсов у предприятия ограничены: на складах есть 90 единиц первого ресурса, 50 единиц второго и 80 единиц третьего ресурса.

Рыночная цена продукции А составляет 800 руб. а цена продукции Б равна 1000 руб. Сколько продукции следует произвести, чтобы получить наибольшую выручку?

**Решение.** Пусть предприятие планирует произвести  $x_1$  единиц продукции А и  $x_2$  единиц продукции Б, тогда выручка предприятия будет, очевидно, равна

$$z = 800x_1 + 1000x_2.$$

Относительно величин  $x_1$  и  $x_2$  можно сказать следующее. Во-первых, они должны быть неотрицательными — отрицательный план производства продукции не имеет экономического смысла. Во вторых, общие расходы ресурсов при производстве  $x_1$  единиц продукции А и  $x_2$  единиц продукции Б не должны превысить запасы этих ресурсов.

Вычислим суммарный расход первого ресурса. На производство единицы продукции А тратится 1 единица первого ресурса, а всего продукции А производится  $x_1$  единиц, значит, на производство всей продукции А будет затрачено  $1x_1 = x_1$  единиц первого ресурса. Аналогично, на производство единицы продукции Б тратится 3 единицы первого ресурса, а всего продукции Б производится  $x_2$  единиц, значит, на производство всей продукции Б будет затрачено  $3x_2$  единиц первого ресурса. Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (и А, и Б) составит  $x_1 + 3x_2$  единиц. А в запасе есть всего 90 единиц этого ресурса. Значит, должно выполняться ограничение:  $x_1 + 3x_2 \leq 90$ . Добавляя аналогичные ограничения по второму и третьему ресурсам, приходим окончательно к следующей задаче.

*Требуется найти такой план производства (т. е. числа  $x_1$  и  $x_2$ ), чтобы выполнение этого плана обеспечивало предприятию наибольшую выручку*

$$z = 800x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max$$

*при ограничениях по ресурсам*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ x_1 + x_2 \leq 50, \\ 2x_1 \leq 80 \end{cases}$$

*и ограничениях неотрицательности*

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Построим область точек на плоскости, где все пять ограничений выполняются. Уравнение  $x_1 + 3x_2 = 90$  определяет множество точек плоскости, лежащих на некоторой прямой. Чтобы эту прямую построить, достаточно вспомнить, что любая прямая полностью определяется любыми своими двумя различными точками. Подставим в данное уравнение  $x_1 = 0$ , получим, что  $0 + 3x_2 = 90$ , откуда  $x_2 = 30$ . Итак, получили первую точку:  $A(x_1 = 0, x_2 = 30)$ . Если подставить в данное уравнение  $x_2 = 0$ , то получим:  $x_1 + 3 \cdot 0 = 90$  или просто  $x_1 = 90$ . Получили вторую точку  $B(x_1 = 90, x_2 = 0)$ . Построим эту прямую: на рис. В.1, а она обозначена римской цифрой I.

Данная прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости, в одной из полуплоскостей выполняется неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$ , а в другой — неравенство  $x_1 + 3x_2 > 90$ . Проверим, какое из этих двух неравенств выполняется в полуплоскости, которая лежит ниже и левее только что построенной прямой. Подставим в неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$  координаты точки  $O(x_1 = 0, x_2 = 0)$ :

$0 + 3 \cdot 0 < 90$  — значит, и для всех остальных точек, которые лежат ниже и левее прямой  $x_1 + 3x_2 = 90$ , выполняется неравенство  $x_1 + 3x_2 < 90$ .

Таким образом, ограничение  $x_1 + 3x_2 \leq 90$  выполняется во всех точках, лежащих на построенной прямой, а также левее и ниже нее. Обозначим на рис. В.1, а стрелкой ту полуплоскость, где выполняется данное неравенство.

Поступим таким же образом с остальными неравенствами: отметим на плоскости множества точек, которые этим неравенствам удовлетворяют (рис. В.1, б).

Пересечение этих множеств (полуплоскостей) образует пятиугольник  $OABCD$ , заштрихованный на рис. В.1, б.

Таким образом, любой план производства, соответствующий некоторой точке из заштрихованного пятиугольника, можно выполнить, такие планы называются допустимыми и мы замечаем, что, вообще говоря, их очень много. Как из них выбрать оптимальный, т. е. приносящий наибольшую выручку  $z = 800x_1 + 1000x_2$ ?

Оказывается, что если оптимальный план существует, то он обязательно будет лежать в одной из угловых точек множества допустимых планов, т. е. в одной из вершин  $OABCD$ . Координаты точки  $A$  мы знаем. Найдем координаты других вершин, например, точки  $C$ .

Эта точка представляет собой пересечение прямых, которые задаются вторым из неравенств и третьим, т. е. в этой точке

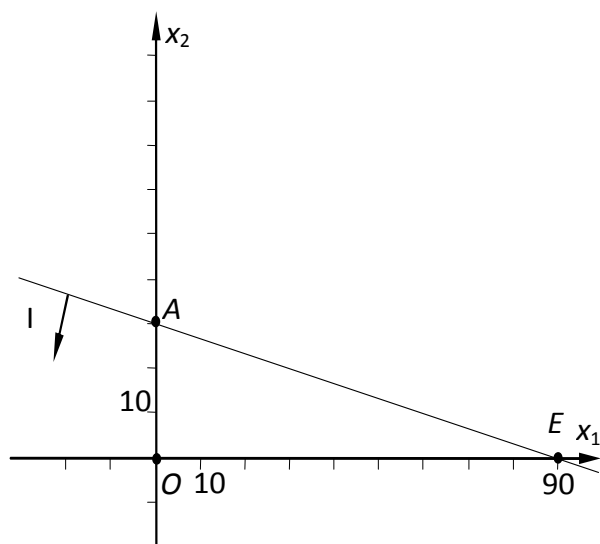
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50, \\ 2x_1 = 80. \end{cases}$$

Из уравнения  $2x_1 = 80$  получаем  $x_1 = 40$ . Подставим  $x_1 = 40$  в уравнение  $x_1 + x_2 = 50$  и получим, что  $x_2 = 10$ . Таким образом точка  $C$  имеет координаты  $C(x_1 = 40, x_2 = 10)$ . Аналогично получаем координаты всех оставшихся вершин пятиугольника  $OABCD$ .

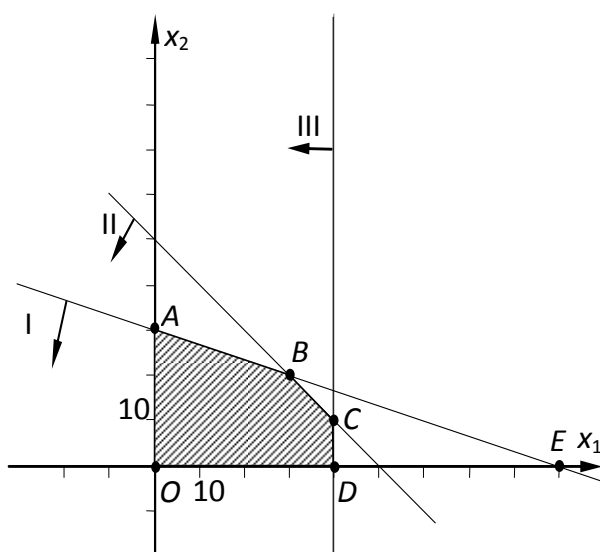
Итак, оптимальное решение обязательно находится в одной из угловых точек:

- $O(x_1 = 0, x_2 = 0)$ , в этой точке выручка  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 0$ ;
- $A(x_1 = 0, x_2 = 30)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 0 + 1000 \cdot 30 = 30\,000$ ;
- $B(x_1 = 30, x_2 = 20)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 20 = 44\,000$ ;
- $C(x_1 = 40, x_2 = 10)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 10 = 42\,000$ ;
- $D(x_1 = 40, x_2 = 0)$ ,  $z = 800x_1 + 1000x_2 = 800 \cdot 40 + 1000 \cdot 0 = 32\,000$ .

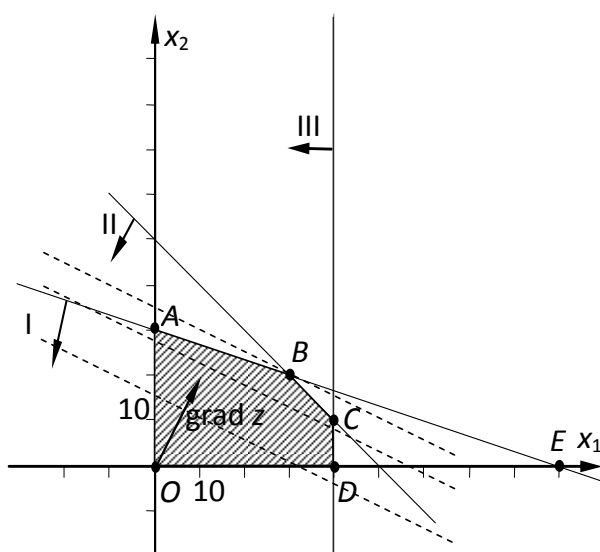
Видим, что наибольшую выручку (44 000 руб.) обеспечит план  $B(x_1 = 30, x_2 = 20)$ , по которому нужно произвести 30 единиц продукции А и 20 единиц продукции Б.



а) ограничение по запасу первого ресурса



б) множество неотрицательных планов производства, удовлетворяющих всем ограничениям по ресурсам



в) градиент и линии уровня

Рис. В.1. Графическое решение задачи оптимального планирования производства

Можно, в принципе, и не перебирать все угловые точки множества допустимых решений. Для этого удобно воспользоваться понятием градиента: *градиент функции*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — это вектор, координаты которого равны частным производным функции по соответствующим переменным:

$$\text{grad } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Градиент функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , вычисленный в некоторой точке, перпендикулярен линии уровня функции, проходящей через эту точку, и показывает направление наибольшего роста функции в этой точке.

Градиент функции выручки  $z = 10x_1 + 20x_2$

$$\text{grad } z = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

указывает направление наибольшего возрастания функции  $z$ .

Линии уровня функции  $z$  образуют семейство параллельных прямых, перпендикулярных градиенту (они обозначены пунктиром на рис. В.1, в). Будем двигать линию уровня в направлении градиента — наибольшего значения функция  $z$  достигает в точке  $B(30, 20)$ . Это и есть оптимальный план производства.  $\square$

Данную задачу мы смогли решить графическим способом, поскольку рассматриваемое предприятие выпускает всего два наименования продукции. Ассортимент продукции, выпускаемой реальными предприятиями гораздо шире, и для оптимизации деятельности таких предприятий графическим методом не обойтись.

Люди научились решать подобные задачи (которые называются задачами линейного программирования) только в середине XX в., за разработку теории линейного программирования академик Л. В. Канторович в 1975 г. получил Нобелевскую премию в области экономики (совместно с Т. Купмансом). В данной книге теории линейного программирования посвящена **третья глава**, а в **четвертой главе** приводятся примеры применения методов линейного программирования в задачах принятия оптимальных решений по планированию производства и поставок.

Но целевая функция и левые части ограничений могут быть представлены и нелинейными функциями. Аналитические и численные методы решения задач **нелинейного программирования**, в которых

ищется максимум или минимум нелинейной функции при наличии нелинейных ограничений, рассматриваются в пятой главе, а **в шестой главе** эти методы применяются к решению задач изучения потребительского спроса и рыночного равновесия.

Начальные две главы являются вводными: **в первой главе** обсуждается применение классических методов математического анализа, предназначенных для поиска экстремумов без наличия ограничений, к решению задач планирования производства; **во второй главе** излагаются необходимые сведения из линейной алгебры, а также описывается предложенная Нобелевским лауреатом В. Леонтьевым модель межотраслевого баланса.

**Седьмая глава** посвящена изучению методов принятия оптимальных решений в многошаговых задачах планирования, основанных на принципах дискретного динамического программирования, **в восьмой главе** изучаются методы оптимизации на графах, а **в девятой главе** излагаются методы поиска оптимальных решений при наличии нескольких критериев.

**В десятой главе** изучается теория игр, которая предназначена для поиска оптимальных решений в конфликтных ситуациях с несколькими участниками, цели которых не совпадают. Центральное место в теории игр занимает понятие равновесных ситуаций, в которых участникам конфликта невыгодно менять свои стратегии при условии, что другие участники конфликта не меняют своих стратегий. Это понятие было впервые введено в одном из основоположников математической экономики А. Курно в книге «Исследование математических принципов теории богатства», изданной в 1838 г. Развитие понятие равновесия получило в работах Нобелевского лауреата Дж. Нэша.

Моделированию конкуренции на отраслевых рынках посвящена **одиннадцатая глава**, в ней рассматривается классическая теория олигополии и конкуренции, а также излагаются новые результаты, полученные автором при моделировании конкуренции на рынке информационных технологий.

В заключительной, **двенадцатой главе** рассматриваются задачи оптимального управления, в которых требуется найти максимум или минимум некоторого интегрального функционала, например, интегрального потребления за некоторый период, при наличии ограничений, представленных дифференциальными уравнениями. Доказывается принцип максимума, предложенный для решения таких задач академиком Л. С. Понтрягиным. Затем рассматриваются конкретные задачи оптимального управления в экономике: рассматривается разработанная Нобелевским лауреатом Р. Солоу модель оптимального экономического роста, а также модель конкуренции коммерческого и свободного программного обеспечения, предложенная автором.

# ГЛАВА 1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

## § 1.1. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

*Производственная функция* выражает зависимость *результата производства* (объема выпускаемой продукции) от *факторов производства* (затраченных ресурсов). При описании экономической системы с помощью производственной функции эта система рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы, а на выходе получается произведенный за некоторый период времени продукт.

Если рассматривать два ресурса:

- *капитал*, т. е. прошлый (накопленный) труд  $K$  в форме основных производственных фондов;
- *настоящий (живой) труд*  $L$ , описываемый количеством занятых, а результатом деятельности экономической системы считать объем выпуска  $X$ , то экономика замещается своей моделью в форме наиболее распространенной двухфакторной производственной функции

$$X = F(K, L).$$

Поскольку обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, удобнее всего объем выпуска исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать национальную экономику, то объемом выпуска можно считать валовой внутренний продукт, а если в качестве экономической системы рассматривать фирму — то просто выпуск продукции в денежном выражении, т. е. суммарную стоимость произведенной продукции всех видов.

Производственная функция называется *неоклассической*, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов  $K$  и  $L$ , является непрерывной и дважды дифференцируемой по обоим аргументам при всех  $K \geq 0, L \geq 0$  и обладает следующими **свойствами**, имеющими естественную экономическую интерпретацию:

- при отсутствии хотя бы одного фактора производство невозможно:  
 $F(K, 0) = 0$  для всех  $K \geq 0$ ,  $F(0, L) = 0$  для всех  $L \geq 0$ ;
- при увеличении затрат ресурсов выпуск продукции возрастает:  

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0 \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0;$$
- при увеличении количества одного из используемых ресурсов при постоянном количестве другого ресурса скорость роста выпуска продукции замедляется:  

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0 \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0;$$
- при неограниченном увеличении количества хотя бы одного из используемых ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает:  
 $F(K, +\infty) = +\infty$  для всех  $K > 0$ ,  $F(+\infty, L) = +\infty$  для всех  $L > 0$ .

Производственная функция называется *линейно-однородной*, если

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для всех } K \geq 0, L \geq 0, \lambda \geq 0.$$

На практике чаще всего используются следующие **конкретные производственные функции**:

- *производственная функция Кобба — Дугласа*:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha},$$

где  $A > 0, \alpha \in (0, 1)$ ; эта производственная функция была предложена в 1899 г. Ф. Уикстидом и впервые использована в 1929 г. Ч. Коббом и П. Дугласом для моделирования реальной экономики (США);

- *мультипликативная производственная функция*:

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

в которой  $A, \alpha_K, \alpha_L > 0, \alpha_K + \alpha_L \leq 1$ ;

- *производственная функция Леонтьева*:

$$F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{a_K}, \frac{L}{a_L} \right\},$$

где  $a_K, a_L > 0$ ;

- *линейная производственная функция*:

$$F(K, L) = c_K K + c_L L,$$

в которой  $c_K, c_L > 0$ .

- *производственная функция с постоянной эластичностью замены:*

$$F(K, L) = A(\alpha K^{-\rho} + (1 - \alpha)L^{-\rho})^{-\gamma/\rho},$$

где  $A > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\rho > -1$ .

Несложно проверить, что данные функции удовлетворяют всем свойствам неоклассических производственных функций, а производственная функция Кобба — Дугласа является, кроме того, линейно-однородной. Предлагаем читателю самостоятельно провести необходимые выкладки.

В мультипликативной производственной функции параметр  $A$  называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при неизменных ресурсах  $K$  и  $L$  и неизменных  $\alpha_K, \alpha_L$  выпуск тем больше, чем больше  $A$ ), параметр  $\alpha_K \in (0, 1)$  имеет смысл коэффициента эластичности выпуска по фондам (*коэффициент эластичности выпуска по фондам* показывает, на сколько процентов вырастет выпуск  $X$  при увеличении фондов  $K$  на 1%:

$$e_X^K = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{\Delta X / X}{\Delta K / K} = \frac{K}{X} \frac{\partial X}{\partial K} = \frac{K}{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}} \frac{\partial (AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = \frac{\alpha_K AK^{\alpha_K-1} L^{\alpha_L}}{AK^{\alpha_K-1} L^{\alpha_L}} = \alpha_K;$$

аналогично определяется *коэффициент эластичности выпуска по труду*

$$e_X^L = \frac{L}{X} \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_L).$$

В производственной функции Кобба — Дугласа (которая является частным случаем мультипликативной производственной функции при  $\alpha_K = \alpha$ ,  $\alpha_L = 1 - \alpha$ ) параметр  $A$  также представляет собой коэффициент нейтрального технического прогресса, коэффициент эластичности выпуска по фондам равен  $\alpha$ , а коэффициент эластичности выпуска по труду равен  $1 - \alpha$ .

В случае двухфакторной производственной функции средние эффективности ресурсов — это *средняя фондоотдача*  $X / K$  и *средняя производительность труда*  $X / L$ , а предельные эффективности ресурсов — это *предельная фондоотдача*  $\partial X / \partial K$  и *предельная производительность труда*  $\partial X / \partial L$ .

В случае мультипликативной производственной функции выпуск зависит от затрат фондов и труда как  $X = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}$ , средняя фондоотдача

$$\frac{X}{K} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{K} = A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}},$$

средняя производительность труда

$$\frac{X}{L} = \frac{AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L}}{L} = A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}},$$

предельная фондоотдача

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\partial(AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial K} = A\alpha_K K^{\alpha_K-1} L^{\alpha_L} = \alpha_K A \frac{L^{\alpha_L}}{K^{1-\alpha_K}} = \alpha_K \frac{X}{K},$$

предельная производительность труда

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial(AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L})}{\partial L} = A\alpha_L K^{\alpha_K} L^{\alpha_L-1} = \alpha_L A \frac{K^{\alpha_K}}{L^{1-\alpha_L}} = \alpha_L \frac{X}{L},$$

т. е. предельные эффективности факторов производства пропорциональны средним эффективным этим факторов.

**ПРИМЕР 1.1.1.** О фирме с мультипликативной производственной функцией известны следующие факты. В настоящее время основные производственные фонды фирмы оцениваются в  $K = 10^8$  ден. ед., всего в фирме занято  $L = 10^3$  сотрудников, каждый из которых производит продукции в среднем на  $M = 10^4$  ден. ед. в мес. Для увеличения выпуска на  $a = 3\%$  необходимо увеличить основные производственные фонды на  $b = 6\%$  или увеличить численность работников на  $c = 9\%$ . Требуется найти производственную функцию.

**Решение.** Мультипликативная производственная функция имеет вид

$$F(K, L) = AK^{\alpha_K} L^{\alpha_L},$$

где параметры  $\alpha_K$  и  $\alpha_L$  имеют смысл эластичностей выпуска соответственно по фондам и по труду. Учитывая это, можем найти

$$\alpha_K = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_L = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

т. е. выпуск фирмы определяется производственной функцией

$$X = AK^{1/2} L^{1/3}.$$

Параметр  $A$  найдем, подставив в эту формулу значения выпуска предприятия в денежном выражении  $X = LM = 10^3 10^4 = 10^7$  ден. ед., капитала  $K = 10^8$  ден. ед. и труда  $L = 10^3$  чел.:

$$10^7 = A(10^8)^{1/2} (10^3)^{1/3} \Leftrightarrow A = 100.$$

Таким образом, окончательно получаем производственную функцию

$$F(K, L) = 100K^{1/2} L^{1/3}. \quad \square$$

## § 1.2. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

Пусть затраты труда и капитала равны  $K$  и  $L$ , объем выпуска (в денежном выражении) определяется производственной функцией

$X = F(K, L)$ , а цены факторов производства (труда и капитала) составляют соответственно  $p_K$  и  $p_L$ , тогда прибыль производителя будет равна

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = F(K, L) - p_K K - p_L L. \quad (1.2.1)$$

Цены ресурсов определяются очевидным образом. Цена труда — это просто заработная плата работника. Цена капитала равна такой денежной сумме, которую необходимо в единицу времени тратить на содержание единицы капитала (т. е. одной денежной единицы). Таким образом, цена капитала равна *норме амортизации* — величине амортизационных отчислений на 1 ден. ед. производственных фондов.

Если считать **аксиомой производителя**, что он стремится получить наибольшую прибыль, то математическая формулировка **задачи производителя** такова: *требуется определить такую технологию (т. е. такие объемы затрат ресурсов), которые приносят максимальную прибыль:*

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) &\rightarrow \max, \\ K &\geq 0, \quad L \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

На самом деле, указанная аксиома может быть справедливой только для фирм, которые находятся в единоличном владении; если же у фирмы несколько собственников, то совершенно не обязательно, чтобы собственники ставили менеджерам задачу максимизации прибыли — скорее они захотят максимизировать не прибыль, а стоимость фирмы, но решение этой задачи выходит за рамки настоящей книги.

Подставим в задаче (1.2.2) вместо прибыли  $\Pi(K, L)$  ее выражение по формуле (1.2.1):

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) = F(K, L) - p_K K - p_L L &\rightarrow \max, \\ K &\geq 0, \quad L \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Приравняем нулю частные производные прибыли по ресурсам:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} &= 0, \\ \frac{\partial [F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} - p_K &= 0, \\ \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} - p_L &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} &= p_K, \\ \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} &= p_L \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial K} &= p_K, \\ \frac{\partial X}{\partial L} &= p_L. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Можно показать, что любая точка  $(K^*, L^*)$ , удовлетворяющая условиям (1.2.4), обязательно будет точкой максимума прибыли, и при этом оптимальные затраты ресурсов  $K^*$  и  $L^*$  будут неотрицательными, т. е. условия (1.2.4) определяют оптимальное решение задачи производителя.

Приведем **экономическую интерпретацию условий максимума прибыли производителя**. В левых частях этих условий стоят предельные эффективности ресурсов, а в правых частях — цены ресурсов, поэтому можно интерпретировать условия (1.2.4) следующим образом: производитель достигает максимальной прибыли при таких затратах ресурсов  $K^*$  и  $L^*$ , что предельные эффективности ресурсов равны их ценам.

**ПРИМЕР 1.2.1.** В условиях примера 1.1.1 известна средняя заработная плата  $w = 10^3$  ден. ед. в мес. и период амортизации основных производственных фондов  $n = 12$  мес. Требуется рассчитать оптимальный размер производственных фондов и оптимальную численность работников. Затем нужно определить, во сколько раз увеличится прибыль фирмы при переходе к оптимальным затратам факторов производства.

**Решение.** В результате решения примера 1.1.1 определена производственная функция фирмы:  $F(K, L) = 100K^{1/2}L^{1/3}$ .

Цена труда  $p_L = w = 10^3$  ден. ед. — это заработная плата, а цена капитала  $p_K = 1/n = 1/12$  ден. ед. равна ежемесячным амортизационным отчислениям на содержание одной денежной единицы производственных фондов, поэтому прибыль фирмы при таких затратах труда и капитала равна [согласно (1.2.1)]

$$\Pi(K, L) = X - p_K K - p_L L = 10^7 - \frac{1}{12}10^8 - 10^3 10^3 = \frac{2}{3} \text{ млн. ден. ед.}$$

Оптимальный размер фирмы задается условиями (1.2.4), состоящими в том, что предельные эффективности ресурсов должны быть в оптимальной точке равны ценам ресурсов. В данном случае предельная фондоотдача и предельная производительность труда равны соответственно

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 50K^{-1/2}L^{1/3}, \quad \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3},$$

поэтому условия оптимального размера фирмы (1.2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} 50K^{-1/2}L^{1/3} = 1/12, \\ \frac{100}{3}K^{1/2}L^{-2/3} = 10^3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = K^{1/2}, \\ K^{1/2} = 30L^{2/3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 600L^{1/3} = 30L^{2/3}, \\ K = 900L^{4/3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K^* = 144\,000\,000, \\ L^* = 8000. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом выпуск фирмы составит

$$X^* = 100(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/3} = 100(144\,000\,000)^{1/2}(8000)^{1/3} = 24\,000\,000 \text{ ден. ед.},$$

а прибыль

$$\begin{aligned}\Pi^*(K, L) &= X^* - p_K K^* - p_L L^* = 24 \cdot 10^6 - \frac{1}{12} 144 \cdot 10^6 - 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3 = \\ &= 4 \text{ млн. ден. ед.}\end{aligned}$$

Замечаем, что оптимальный выбор затрат труда и капитала позволил увеличить прибыль в шесть раз!  $\square$

### § 1.3. МОДЕЛИ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

Перейдем к обсуждению того, как меняется поведение производителей при введении налогов. Начнем с исследования изменения рыночного равновесия при введении **акциза** — налога, включаемого в цену товара (акциз может быть *выборочным*, т. е. применяться к определенной группе товаров, например, к алкогольной продукции, а может быть *универсальным* и взиматься со всех товаров, например, как налог с продаж). *Ставка акциза*  $t$  определяется как доля цены товара, взимаемая в виде налога.

В общем случае потребительский спрос на некоторый товар зависит от большого числа факторов: цены данного товара, цен других товаров, сезона, дохода покупателя и т. д. Если считать все факторы, кроме цены  $p$ , неизменными, то полученную зависимость спроса  $D$  от цены  $p$  можно рассматривать как функцию спроса  $D = D(p)$ .

Точно так же можно рассмотреть функцию предложения товара  $S = S(p)$  — зависимость количества товара  $S$ , предлагаемого к продаже производителями, от цены товара  $p$ , которая сложилась на рынке.

При этом *равновесная цена*  $p_0$  определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$S(p_0) = D(p_0). \quad (1.3.1)$$

При введении акциза по ставке  $t \in (0; 1)$  равновесие спроса и предложения (1.3.1) изменится, новой равновесной ценой станет цена  $p_t$ , удовлетворяющая условию

$$S((1-t)p_t) = D(p_t), \quad (1.3.2)$$

поскольку теперь при цене товара  $p$  его стоимость для потребителя равна  $p$ , а выручка производителя от продажи единицы продукции равна  $(1-t)p$ .

Может показаться, что бремя акцизов целиком ложится на потребителя, т. е. при введении акциза по ставке  $t$  цены возрастают в  $1/(1-t)$  раз, так чтобы после взимания налогов производитель получил ту же выручку от продажи единицы товара, что и раньше:

$$(1-t) \frac{1}{1-t} p_0 = p_0.$$

Это заблуждение, в чем позволяет убедиться следующий пример.

**ПРИМЕР 1.3.1.** На рынке некоторого товара функция предложения  $S(p) = 2p - 2$ , а функция спроса  $D(p) = 10 - p$ . Требуется определить, во сколько раз изменится равновесная цена товара, реализованный спрос и выручка производителя при введении акциза по ставке  $t \in (0; 1)$ . Полученные формулы нужно интерпретировать при установлении ставки акциза на уровне 1, 5, 20, 50 и 90%.

**Решение.** Вначале из условия (1.3.1) найдем равновесную цену до введения акциза:

$$S(p_0) = D(p_0) \Leftrightarrow 2p_0 - 2 = 10 - p_0 \Leftrightarrow p_0 = 4 \text{ ден. ед.}$$

Теперь определим из условия (1.3.2) равновесную цену после введения налога:

$$S((1-t)p_t) = D(p_t) \Leftrightarrow 2(1-t)p_t - 2 = 10 - p_t \Leftrightarrow p_t = \frac{12}{3-2t} \text{ ден. ед.} \quad (1.3.3)$$

Очевидно,  $p_t > p_0$ , определим, во сколько раз:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{12}{4(3-2t)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}t}.$$

Таким образом, в условиях рассматриваемого примера на потребителя ложится бремя оплаты двух третей введенного налога, а оставшуюся треть платит производитель.

Чтобы выяснить, на сколько процентов вырастает цена при введении акциза, преобразуем последнее выражение:

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}t} = 1 + \frac{\frac{2}{3}t}{1-\frac{2}{3}t}.$$

Отсюда следует, что введение акциза при ставке  $t = 1\% = 0,01$  приводит к незначительному увеличению цены — на

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 0,01}{1-\frac{2}{3} \cdot 0,01} = \frac{1}{149} \approx 0,7\%,$$

введение 5%-ного акциза приводит к увеличению цены на

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 0,05}{1-\frac{2}{3} \cdot 0,05} = \frac{1}{29} \approx 3,5\%,$$

для ставок, равных 20, 50 и 90%, получаем соответственно увеличение цены на 15,4, 50 и 150%.

Естественно, увеличение цены приводит к уменьшению объема реализованного спроса и предложения, и как следствие, к уменьшению выручки производителя. До введения налога в точке равновесия реализовывался спрос

$$D(p_0) = 10 - p_0 = 6 \text{ ед.},$$

с введением акциза спрос стал равен

$$D(p_t) = 10 - \frac{12}{3-2t} = \frac{18-20t}{3-2t} \text{ ед.}$$

Найдем отношение нового и старого значений спроса:

$$\frac{D(p_t)}{D(p_0)} = \frac{18-20t}{6(3-2t)} = \frac{9-10t}{9-6t} = 1 - \frac{4t}{9-6t}.$$

При ставке акциза  $t = 1\%$  из последнего выражения следует, что спрос снижается на

$$\frac{4 \cdot 0,01}{9 - 6 \cdot 0,01} = \frac{4}{894} \approx 0,5\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0,05}{9 - 6 \cdot 0,05} = \frac{2}{87} \approx 2,3\%,$$

для ставок, равных 20 и 50%, получаем соответственно снижение спроса на 10,3 и 33,3%, а при 90%-ном акцизе в данном примере спрос полностью исчезает:

$$\frac{4 \cdot 0,9}{9 - 6 \cdot 0,9} = 1 = 100\%.$$

Теперь посмотрим, как изменится выручка производителя при введении акциза.

До введения акциза выручка равна

$$p_0 D(p_0) = 4 \cdot 6 = 24 \text{ ден. ед.},$$

после введения акциза выручка (с учетом уплаты налога) изменяется до

$$(1-t) p_t D(p_t) = \frac{24(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} \text{ ден. ед.}$$

При этом

$$\frac{(1-t)p_t D(p_t)}{p_0 D(p_0)} = \frac{(1-t)(9-10t)}{(3-2t)^2} = 1 - \frac{t(7-6t)}{(3-2t)^2}.$$

Таким образом, при ставке акциза  $t = 1\%$  выручка уменьшается на

$$\frac{0,01(7-6 \cdot 0,01)}{(3-2 \cdot 0,01)^2} \approx 0,8\%,$$

при 5%-ной ставке аналогичный расчет показывает уменьшение спроса после введения налога на

$$\frac{4 \cdot 0,05}{9-6 \cdot 0,05} = \frac{2}{87} \approx 2,3\%,$$

для ставок, равных 5, 20 и 50%, получаем соответственно снижение выручки на 4,0, 17,2 и 50,0%. При 90%-ном акцизе в данном примере выручка будет равна нулю.  $\square$

Теперь посмотрим на ту же ситуацию с точки зрения государства.

**ПРИМЕР 1.3.2.** В условиях примера 1.3.1 требуется найти такую ставку акциза, которая обеспечит максимум налоговых поступлений.

**Решение.** Чтобы определить ставку акциза, максимизирующую налоговые поступления, поставим такую задачу:

$$\begin{aligned} T(t) &= tp_t D(p_t) \rightarrow \max, \\ S((1-t)p_t) &= D(p_t), \\ p_t &> 0, \quad 0 < t < 1, \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

которую, учитывая конкретный вид функции спроса из условия примера ( $D(p) = 10 - p$ ), а также выражение для равновесной цены после введения акциза (1.3.3), преобразуем к виду

$$\begin{aligned} T(t) &= tp_t (10 - p_t) \rightarrow \max, \\ p_t &= \frac{12}{3-2t}, \\ p_t &> 0, \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} T(t) &= t \frac{12}{3-2t} \left( 10 - \frac{12}{3-2t} \right) = \frac{24t(9-10t)}{(3-2t)^2} \rightarrow \max, \\ 0 &< t < 1. \end{aligned}$$

Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 T'(t) &= \\
 &= \left( \frac{24t(9-10t)}{(3-2t)^2} \right)' = \frac{24}{(3-2t)^4} \left( (9t-10t^2)'(3-2t)^2 - ((3-2t)^2)'(9t-10t^2) \right) = \\
 &= \frac{24}{(3-2t)^4} \left( (9-20t)(3-2t)^2 + 4(3-2t)(9t-10t^2) \right) = \\
 &= \frac{24}{(3-2t)^3} \left( (9-20t)(3-2t) + 4(9t-10t^2) \right) = \\
 &= \frac{24}{(3-2t)^3} (27-78t+40t^2+36t-40t^2) = \frac{72(9-14t)}{(3-2t)^3},
 \end{aligned}$$

определяем критические точки:  $9/14$  и  $3/2$ , находим промежутки возрастания:  $(-\infty; 9/14]$  и  $(3/2; +\infty)$  и промежуток убывания  $[9/14; 3/2)$ . Это дает возможность определить точку максимума функции  $T(t)$ :  $t^* = 9/14$ . Поскольку данная точка глобального максимума принадлежит интервалу  $(0; 1)$ , значение  $t^* = 9/14 \approx 64\%$  и является решением задачи (1.3.4).

При такой ставке акциза равновесная цена равна

$$p^* = \frac{12}{3 - 2 \cdot \frac{9}{14}} = 7 \text{ ден. ед.} \quad (1.3.5)$$

это на 75% выше, чем на рынке без акциза; равновесный спрос составляет

$$D(p^*) = 10 - 7 = 3 \text{ ед.} \quad \text{—}$$

это в два раза меньше, чем на рынке без акциза.

При этом налоговые поступления составляют

$$T(t^*) = t^* p^* (10 - p^*) = \frac{9}{14} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ ден. ед.,}$$

а выручка

$$(1 - t^*) p^* D(p^*) = \left( 1 - \frac{9}{14} \right) \cdot 7 \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ ден. ед.}$$

что на 69% меньше, чем до введения акциза.  $\square$

Посмотрим теперь, как введение акциза повлияет на оптимальное решение задачи производителя (1.2.3). После введения акциза (по ставке  $t$ ) выражение для прибыли производителя изменится по сравнению с (1.2.3):

$$\Pi(K, L) = (1 - t)F(K, L) - p_K K - p_L L.$$

Запишем необходимые условия максимума прибыли:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(K, L)}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial [(1-t)F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial K} = 0, \\ \frac{\partial [(1-t)F(K, L) - p_K K - p_L L]}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-t) \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = p_K, \\ (1-t) \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = p_L. \end{cases}$$

У неоклассических производственных функций первые производные положительны, а вторые — отрицательны (см. параграф 1.1), поэтому  $\partial F(K, L) / \partial K$  и  $\partial F(K, L) / \partial L$  — положительные убывающие функции. Отсюда следует, что максимум прибыли при наличии акциза достигается при меньших затратах и труда, и капитала, и как следствие, при меньших объемах производства.

Перейдем теперь к рассмотрению **налога на прибыль**. Поскольку налог на прибыль не изменяет условие рыночного равновесия (1.3.1), он не изменяет равновесных рыночных цен, значений спроса и предложения.

Точно такой же вывод можно получить из сравнения задачи

$$\Pi(K, L) = (1-t)(F(K, L) - p_K K - p_L L)$$

с задачей (1.2.3): условия максимума прибыли в этих задачах совпадают.

Таким образом, между акцизом и налогом на прибыль есть существенные различия. В отличие от налога на прибыль, который является только инструментом перераспределения части доходов от успешных производителей в пользу государства, акциз является также инструментом рыночного регулирования, позволяя не только перераспределять доходы, но и регулировать объемы производства товаров.

## § 1.4. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

В традиционной экономике материальных товаров предприятия тратят значительные ресурсы на содержание складских запасов, и перед такими предприятиями стоит важная задача управления запасами с целью предотвращения как дефицита, так и избытков.

Обсудим модель управления запасами, основная цель которой — определение оптимального размера заказываемой партии и оптимальной частоты заказов.

Будем считать, что производственные потребности  $v$  в единицу времени являются постоянным, заказанная партия доставляется одновременно, затраты  $K$  на организацию поставки постоянны и не зависят от размера  $q$  заказываемой партии, а издержки содержания единицы сырья составляют  $s$  за единицу времени.

Уровень запаса снижается равномерно от  $q$  до нуля, после чего подается заказ на доставку новой партии сырья величиной  $q$ . Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины  $q$ . Зависимость уровня запаса  $I$  от времени  $t$  иллюстрируется рис. 1.4.1.

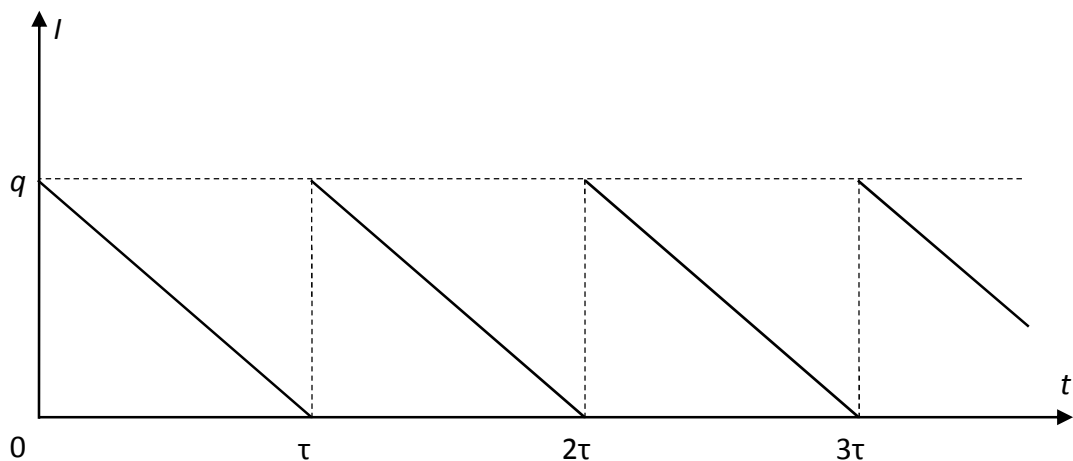


Рис. 1.4.1. Динамика уровня запасов

Интервал времени длиной  $\tau$  называется *циклом запаса*. Длина цикла равна, очевидно,  $\tau = q/v$ , средняя величина запаса равна  $q/2$ . Поэтому издержки в течение цикла  $L$  состоят из стоимости заказа  $K$  и затрат по содержанию запаса:

$$L = K + s \frac{q}{2} \tau.$$

Издержки в единицу времени  $l$  получим, разделив издержки в течение цикла  $L$  на длину цикла  $\tau$ :

$$l = \frac{L}{\tau} = \frac{K + s \frac{q}{2} \tau}{\tau} = \frac{K}{q/v} + s \frac{q}{2} = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}$$

Оптимальный размер заказываемой партии определим из необходимого условия максимума функции  $l(q)$  — равенства нулю первой производной:

$$l'(q) = \frac{s}{2} - \frac{Kv}{q^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{s}{2} = \frac{Kv}{q^2} \quad \text{или} \quad q^2 = \frac{2Kv}{s}.$$

Учитывая неотрицательность размера заказа, окончательно получаем, что оптимальный размер заказываемой партии должен составлять

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}. \quad (1.4.1)$$

При этом достаточное условие минимума выполняется:  
 $l''(q^*) = 2Kv / (q^*)^3 > 0$ , так как  $K, v, q^* > 0$ .

Формула (1.4.1) называется **формулой Уилсона**.

При этом оптимальная длина цикла

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}}. \quad (1.4.2)$$

Оптимальная стратегия управления запасами предусматривает заказ партии размером  $q^*$  через каждые  $\tau^*$  единиц времени, а наименьшие затраты в единицу времени при такой стратегии будут равны

$$l(q^*) = \frac{Kv}{q^*} + \frac{sq^*}{2} = \frac{Kv}{\sqrt{\frac{2Kv}{s}}} + \frac{s\sqrt{\frac{2Kv}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{Kvs}{2}} + \frac{\sqrt{2Kvs}}{2} = \sqrt{Kvs}.$$

**ПРИМЕР 1.4.2.** Мебельная фабрика использует в своем производстве фанеру. Ежедневно требуется 200 листов фанеры, затраты на организацию каждой поставки равны 8000 руб., издержки содержания одного листа фанеры на складе равны 20 руб. в неделю. Требуется определить оптимальный размер заказываемой партии фанеры и цикл заказа.

**Решение.** По условию  $v = 200$ ,  $K = 8000$ ,  $s = 20$ . Используя формулы (1.4.1)—(1.4.2), получаем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 200}{20}} = \sqrt{160\,000} = 400, \quad \tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{400}{200} = 2.$$

Таким образом, каждые две недели следует заказывать по 400 листов фанеры.  $\square$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Каково соотношение между предельными и средними эффективностями использования ресурсов в случае, если экономическая система описывается: а) линейной производственной функцией; б) производственной функцией Леонтьева?
2. Какова предельная норма замены труда капиталом в экономической системе, которая описывается: а) мультипликативной производственной функцией; б) линейной производственной функцией; в) производственной функцией Леонтьева.
3. Постройте на одном рисунке графики нескольких *изоквант* (т. е. линий, на которых выпуск не изменяется) для следующих производственных функций: а) мультипликативной; б) линейной; в) Леонтьева.
4. Постройте на одном рисунке графики нескольких *изоклинал* (т. е. линий наибольшего роста выпуска) для следующих производственных функций: а) мультипликативной; б) линейной; в) Леонтьева.

5. Какой экономический смысл имеют коэффициенты  $c_K$  и  $c_L$  линейной производственной функции?
6. Объем ежемесячного выпуска продукции завода в денежном выражении составляет 10 млн. руб., стоимость основных производственных фондов этого завода также равна 10 млн. руб., а численность занятых равна 1 тыс. человек Найдите производственную функцию Кобба — Дугласа данного завода.
7. Выпуск продукции  $X$  (т/ч) определяется только количеством занятых рабочих  $K$  (чел./ч):  $X = F(K)$ , при этом единственным видом издержек является заработная плата. Найдите *функцию спроса на труд* — зависимость оптимальной численности занятых от цены продукции  $p$  и заработной платы  $w$  в случае, когда  $F(K) = 6\sqrt{K}$ ; б)  $F(K) = \ln(K + 2)$ .
8. Прибыль фирмы следующим образом зависит от затрат капитала  $K$  и затрат труда  $L$ :  $\Pi = -4K^2 + 24K + 2KL - 6L - L^2$ . Найдите такие размеры затрат капитала и труда, при которых прибыль будет максимальной.
9. Стоимость размещения рекламного баннера на популярном портале составляет 50 тыс. руб. в день, а стоимость показа минутного рекламного ролика по телевидению равна 150 тыс. руб. Бюджет фирмы предусматривает еженедельные расходы на рекламу в размере 1,5 млн. руб. Прибыль фирмы зависит от количества дней размещения баннера на портале  $x_1$  и количества показов ролика по телевидению  $x_{21}$  следующим образом:  $X = 4x_1x_2 - 50 - x_2^2 + 20x_1 + 1\,000\,000$ . Как оптимально распорядиться рекламным бюджетом?
10. Издержки фирмы зависят от объема выпуска:  $C(X) = X^2 + 2X + 3$ . Цена, по которой фирма реализует продукцию, также зависит от объема выпуска:  $P(X) = 200 - 2X$ . Найдите оптимальный объем выпуска в трех ситуациях: а) налоги не взимаются; б) взимается 20%-ный налог на прибыль; в) взимается 20%-ный акциз.
11. В среднем магазин продает 300 чайников данной модели. Накладные расходы по заказу доставки партии чайников составляют 10 000 руб., себестоимость хранения одного чайника на складе равна 300 руб./мес., дефицит чайников не допускается. Найдите оптимальный размер заказываемой партии чайников данной марки, интервал между заказами и месячные издержки магазина по доставке и хранению чайников данной модели.

## ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

### § 2.1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

Совокупность  $n$  чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , заданных в определенном порядке, называется  $n$ -мерным вектором. Числа  $a_i$  называются компонентами или координатами вектора, число  $n$  — его размерностью. Обозначают вектор одной жирной строчной латинской буквой:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

[на доске и в тетради, конечно, жирный шрифт не используется, но чтобы не возникало путаницы, можно над буквами, обозначающими векторы, ставить черточки или стрелочки:  $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  или  $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ].

Например,  $\mathbf{x} = (9, -2, 4, -7, 0, 3)$  — это шестимерный вектор.

Допустим, что предприятие выпускает  $n$  видов продукции, притом предполагается изготовить продукцию первого вида в количестве  $x_1$  шт., второго вида в количестве  $x_2$  шт. и т. д. В этом случае производственную программу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно рассматривать как  $n$ -мерный вектор.

Два  $n$ -мерных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называются равными, если все их соответствующие компоненты равны:

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Суммой двух  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется  $n$ -мерный вектор

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

компоненты которого получаются сложением соответствующих компонент данных векторов.

Предположим, например, что производственное объединение состоит из двух мебельных фабрик, которые выпускают столы, стулья, кресла и кровати. Пусть первая фабрика выпускает 1000 столов, 10 000 стульев, 2000 кресел и 500 кроватей в год, а вторая фабрика — 2500 столов, 12 000 стульев, 2000 кресел и 1000 кроватей в год. Тогда объем годового выпуска первой фабрики представляет собой вектор  $\mathbf{a} = (1000, 10\,000, 2000, 500)$ , объем годового выпуска второй фабрики — это вектор  $\mathbf{b} = (2500, 12\,000, 2000, 1000)$ , при этом объем годового выпуска всего объединения равен сумме векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3500, 22\,000, 4000, 1500).$$

Операция сложения векторов обладает свойствами *коммутативности* и *ассоциативности*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (2.1.1)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (2.1.2)$$

Вектор

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

все компоненты которого равны нулю, называется *нуль-вектором*. Каков бы ни был вектор  $\mathbf{a}$ , справедливо равенство

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad (2.1.3)$$

т. е. нуль-вектор ведет себя при сложения векторов аналогично числу нуль в арифметике.

Вектор  $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  называется *противоположным* вектору  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и обозначается  $-\mathbf{a}$ . Очевидно,

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (2.1.4)$$

Операция *вычитания векторов* определяется как сложение с противоположным вектором

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

Под произведением вектора  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  на число  $\lambda$  понимают вектор

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n),$$

компоненты которого получаются умножением всех компонент данного вектора на данное число, и обозначают  $\lambda \mathbf{a}$  или  $\mathbf{a} \lambda$ . Например, если первая из рассмотренных мебельных фабрик пожелает увеличить свой выпуск в два раза, то это будет означать, что новый годовой план производства будет задаваться вектором  $2\mathbf{a} = (2000, 20\,000, 4000, 1000)$ .

Умножение вектора на число обладает свойством *ассоциативности*:

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\mu \lambda) \mathbf{a} \quad (2.1.5)$$

и свойством *дистрибутивности* относительно векторного и числового сомножителей:

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad (2.1.6)$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}. \quad (2.1.7)$$

Очевидно, при умножении любого вектора на единицу этот вектор не изменится:

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (2.1.8)$$

а при умножении любого вектора на число ноль и любого числа на нуль-вектор получается нуль-вектор

$$0 \mathbf{a} = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (2.1.9)$$

*Скалярным произведением двух  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  называют число, равное сумме произведений одноименных координат данных векторов*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (2.1.10)$$

В пакете прикладных программ Microsoft Excel скалярное произведение векторов вычисляется с помощью функции

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{СУММПРОИЗВ}(\text{вектор } \mathbf{a}; \text{вектор } \mathbf{b}),$$

где «вектор  $\mathbf{a}$ » и «вектор  $\mathbf{b}$ » — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие векторы.

**ПРИМЕР 2.1.1.** Даны векторы  $\mathbf{a} = (1, 5, 15)$  и  $\mathbf{b} = (2, -1, 0)$ . Требуется вычислить их скалярное произведение вручную и с помощью пакета Microsoft Excel.

**Решение.** Вычисляем  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3$  по формуле (2.1.10):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 = -3.$$

Теперь получим решение с помощью пакета Microsoft Excel. Введем данные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в ячейки A2:C2 и E2:G2 рабочего листа Microsoft Excel, а в ячейку A5 введем формулу «=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)», как показано на рис. 2.1.1, а.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>a</b>				<b>b</b>		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<b>&lt;a, b&gt;</b>						
5	=СУММПРОИЗВ(A2:C2;E2:G2)						

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>a</b>				<b>b</b>		
2	1	5	-1		2	-1	0
3							
4	<b>&lt;a, b&gt;</b>						
5	-3						

б) результаты расчета

**Рис. 2.1.1.** Вычисление скалярного произведения в Microsoft Excel

Результат вычисления представлен на рис. 2.1.1, б (в ячейке A5). Естественно, результаты ручного и компьютерного вычисления скалярного произведения совпали.  $\square$

Операция скалярного умножения векторов обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \quad \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle, \\ \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0,\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

причем знак равенства в последнем соотношении возможен лишь при  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Предположим, что в магазине продается картофель, помидоры и огурцы, причем цена 1 кг картофеля равна 10 руб., цена 1 кг огурцов равна 30 руб., а цена 1 кг помидоров равна 50 руб. Тогда вектор цен в этом магазине равен  $\mathbf{p} = (10, 30, 50)$ . Если покупатель собирается приобрести набор товаров  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , т. е.  $x_1$  кг картофеля,  $x_2$  кг огурцов и  $x_3$  кг помидоров, то скалярное произведение вектора цен  $\mathbf{p}$  на вектор набора товаров  $\mathbf{x}$ , равное

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3,$$

представляет собой стоимость набора товаров  $\mathbf{x}$ . Покупатель, располагающий для покупки картофеля, помидоров и огурцов бюджетом  $I = 400$  руб., может приобрести только такие наборы товаров, которые удовлетворяют так называемому бюджетному ограничению

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq I$$

или, в нашем случае,

$$10x_1 + 30x_2 + 50x_3 \leq 400.$$

Совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *матрицей размера  $m \times n$* . В книгах матрицы обозначают жирными заглавными буквами латинского алфавита:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или, кратко,

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(на доске и в тетради матрицы достаточно обозначать просто заглавными буквами).

Элементы матрицы обозначаются строчными буквами с двумя индексами, из которых первый означает номер строки матрицы, в которой стоит данный элемент, а второй индекс — номер столбца, например, элемент  $a_{34}$  находится на пересечении третьей строки и в четвертого столбца матрицы  $\mathbf{A}$ .

Иногда для обозначения матриц вместо круглых скобок используют квадратные скобки или двойные вертикальные черточки:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Числа  $a_{ij}$  называются *элементами матрицы*, строки и столбцы — *ее рядами*.

Множество всех матриц, состоящих из  $m$  строк и  $n$  столбцов, обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , поэтому для того, чтобы кратко записать, что матрица  $\mathbf{A}$  имеет размер  $m \times n$ , часто пользуются обозначением

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Две матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одного и того же размера  $m \times n$  называются *равными*, если равны все их соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица, состоящая из одного столбца (т. е. если  $n = 1$ ) [или из одной строки (т. е. если  $m = 1$ )], называется *вектором — столбцом* [или, соответственно, *вектором — строкой*]

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю. Нулевая матрица обозначается

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что нулевая матрица имеет размер  $m \times n$ , мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{O}_{m \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \right|_{m \text{ строк}}.$$

Если  $m = n$ , то матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

называется *квадратной*, а число ее строк (совпадающее с числом столбцов и равное  $n$ ) — *порядком матрицы*. Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные — нулю:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что единичная матрица имеет  $n$ -й порядок, мы будем (когда это необходимо) пользоваться нижним индексом:

$$\mathbf{E}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ строк}.$$

Если в матрице  $\mathbf{A}$  заменить строки столбцами, сохранив их порядок, то получится новая матрица

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемая *транспонированной по отношению к матрице  $\mathbf{A}$* . Очевидно,  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

В пакете Microsoft Excel для транспонирования матриц используется функция

$$\mathbf{A}^T = \text{ТРАНСП}(\text{матрица } \mathbf{A}),$$

где «матрица  $\mathbf{A}$ » — ссылка на ячейки рабочего листа, содержащие данную матрицу. Эта формула должна быть введена в рабочий лист как формула массива Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере 2.1.2).

**ПРИМЕР 2.1.2.** Дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel матрицу  $\mathbf{A}^T$ .

**Решение.** Найдем матрицу  $\mathbf{A}^T$ , транспонированную к матрице  $\mathbf{A}$ . Первая строка матрицы  $\mathbf{A}$  (1 2 -3) станет первым столбцом матрицы  $\mathbf{A}^T$ , а вторая строка матрицы  $\mathbf{A}$  (4 5 0) станет вторым столбцом матрицы  $\mathbf{A}^T$ :

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как получить тот же результат в пакете Microsoft Excel. Введем матрицу  $\mathbf{A}$  в ячейки A2:C3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.2, а.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>A</b>				<b>A<sup>T</sup></b>			
2	1	2	-3		=ТРАНСП(A2:C3)			
3	4	5	0					
4								

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>A</b>				<b>A<sup>T</sup></b>			
2	1	2	-3		1	4		
3	4	5	0		2	5		
4					-3	0		

б) результаты расчета

**Рис. 2.1.2.** Транспонирование матрицы в Microsoft Excel

Матрица  $\mathbf{A}^T$  имеет две строки и три столбца, значит, матрица  $\mathbf{A}^T$  будет иметь три строки и два столбца. Отведем под результат ячейки E2:F4 (они как раз занимают три строки и два столбца). В ячейку E2 введем формулу «=ТРАНСП(A2:C3)», причем эту формулу необходимо ввести как формулу массива. Для этого нужно мышью выделить диапазон E2:F4, начиная с ячейки E2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.2, б (в ячейках E2:F4). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного транспонирования матрицы совпали. Если формуле ввести не как формулу массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: число 1.  $\square$

Под суммой двух матриц  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  и  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  одного и того же размера понимают матрицу, элементы которой получаются сложением соответствующих элементов данных матриц

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

*Произведение матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  на число  $\lambda$*  — это матрица, элементы которой получаются умножением всех элементов данной матрицы на данное число:

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над векторами.

**ПРИМЕР 2.1.3.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их сумму  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  и произведение матрицы  $\mathbf{A}$  на число 3.

**Решение.** Данные матрицы имеют одинаковый размер  $2 \times 3$ , поэтому их можно складывать, при этом сумма  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  будет иметь тот же размер  $2 \times 3$ . Элементы суммы получаются сложением соответствующих элементов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & -3+(-1) \\ 4+1 & 5+2 & 0+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы  $\mathbf{A}$  на число 3 вычисляется так:

$$3\mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать сумму матриц и произведение матрицы на число в пакете Microsoft Excel очень просто. Введем матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в ячейки A2:C3 и E2:G3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, а. Сумма  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  имеет размер  $2 \times 3$ , поэтому отведем под результат ячейки A6:C7 (они как раз занимают две строки и три столбца). В ячейку A6 введем формулу «=A2+E2», далее скопируем ячейку A6 в буфер обмена, выделим диапазон A6:C7 и вставим в этот диапазон формулу из буфера обмена. В результате в ячейках A6:C7 будет рассчитана сумма  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  (рис. 2.1.3, б). Произведение  $3\mathbf{A}$  рассчитывается аналогично (см. рис. 2.1.3). Компьютерные расчеты дали, конечно, те же результаты, что и ручные вычисления.  $\square$

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>A</b>				<b>B</b>		
2	1	2	-3		2	1	-1
3	4	5	0		1	2	-7
4							
5	<b>A + B</b>				<b>3A</b>		
6	=A2+E2				=3*A2		
7							

а) формулы Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>A</b>				<b>B</b>		
2	1	2	-3		2	1	-1
3	4	5	0		1	2	-7
	<b>A + B</b>				<b>3A</b>		
4	3	3	-4		3	6	-9
5	5	7	-7		12	15	0

б) результаты расчета

**Рис. 2.1.3.** Вычисление суммы матриц и произведения матрицы на число в Microsoft Excel

Умножение матрицы на матрицу определяется только при условии, что число столбцов первого сомножителя **A** равно числу строк второго сомножителя **B**. В этом случае размерность любого вектора — строки матрицы **A** будет совпадать с размерностью любого вектора — столбца матрицы **B**, и можно составить их скалярные произведения в любом сочетании. Под произведением матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  на матрицу  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  понимают матрицу  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , элемент  $c_{ij}$  которой равен скалярному произведению  $i$ -й строки матрицы **A** на  $j$ -й столбец матрицы **B**:

$$c_{ij} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}), (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{kj}) \rangle$$

или

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^k a_{it}b_{tj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, число строк произведения совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов — с числом столбцов второго сомножителя.

В пакете Microsoft Excel для вычисления произведения матриц используется функция

$$\mathbf{AB} = \text{МУМНОЖ}(\text{матрица } \mathbf{A}; \text{ матрица } \mathbf{B}),$$

где «матрица  $\mathbf{A}$ » и «матрица  $\mathbf{B}$ » — ссылки на ячейки рабочего листа, содержащие соответствующие матрицы. Данная формула должна быть введена в рабочий лист как формула массива Microsoft Excel (конкретные пояснения по использованию формул массива даны в примере 2.1.3).

**ПРИМЕР 2.1.1.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить вручную и с помощью пакета Microsoft Excel их произведение  $\mathbf{AB}$  (если такое произведение существует).

**Решение.** Прежде всего убедимся, что данные матрицы можно перемножать и найдем размер результата умножения. Запишем под матрицами их размеры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 3 & \xlongequal{\quad} & 3 \times 2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & 4 \times 2 & \end{array}$$

В матрице  $\mathbf{A}$  четыре строки и три столбца, в матрице  $\mathbf{B}$  три строки и два столбца. Число столбцов в матрице  $\mathbf{A}$  равно числу строк в матрице  $\mathbf{B}$ , поэтому матрицу  $\mathbf{A}$  можно умножить на матрицу  $\mathbf{B}$ , при этом произведение  $\mathbf{AB}$  будет иметь столько же строк, сколько в матрице  $\mathbf{A}$  (т. е. четыре), и столько же столбцов, сколько в матрице  $\mathbf{B}$  (т. е. два). Итак,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ? & | & ? \\ ? & | & ? \\ ? & | & ? \\ ? & | & ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}.$$

Теперь на место вопросительных знаков поставим числа — элементы произведения  $\mathbf{AB}$ :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{-1} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix},$$

Поясним, как получен элемент произведения  $\mathbf{AB}$ , который стоит на пересечении первой строки и первого столбца. В левой матрице мы двигаемся вдоль первой строки (она выделена пунктиром), и одновременно с этим в правой матрице мы двигаемся вдоль первого столбца (он также выделен пунктиром). Когда мы встречаем два очередных элемента  $a_{1i}$  (из первой матрицы) и  $b_{i1}$  (из второй матрицы), мы их перемножаем, и все полученные произведения складываем:

$$\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \rangle = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = -3.$$

Чтобы получить элемент произведения, который стоит на пересечении первой строки и второго столбца, мы аналогичные действия произвели с первой строкой матрицы  $\mathbf{A}$  и со вторым столбцом матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$\langle (2, 0, -1), (1, 3, 5) \rangle = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 = -2.$$

Остальные элементы рассчитываются аналогично.

Итак,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 10 \\ 6 & 6 \\ 22 & 28 \end{pmatrix}.$$

Теперь поясним, как рассчитать произведение данных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в пакете Microsoft Excel. Введем матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в ячейки A2:C5 и E2:F4 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 2.1.3, а.

Произведение  $\mathbf{AB}$  имеет размер  $4 \times 2$ , поэтому отведем под результат ячейки H2:I5 (они как раз занимают четыре строки и два столбца). В ячейку H2 введем формулу «=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)», причем эту формулу необходимо ввести как формулу массива. Для этого нужно мышью выделить диа-

пазон H2:I5, начиная с ячейки H2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 2.1.3, б (в ячейках H2:I5). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного вычисления произведения матриц совпали. Заметим, что если формула будет введена не как формула массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: –3. □

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>A</b>				<b>B</b>			<b>AB</b>					
2	2	0	–1		1	2		=МУМНОЖ(A2:C5;E2:F4)					
3	1	2	0		3	4							
4	–2	1	1		5	6							
5	1	2	3										

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>A</b>				<b>B</b>			<b>AB</b>					
2	2	0	–1		1	2		–3	–2				
3	1	2	0		3	4		7	10				
4	–2	1	1		5	6		6	6				
5	1	2	3					22	28				

б) результаты расчета

Рис. 2.1.1. Вычисление произведения матриц в Microsoft Excel

Нетрудно доказать, что действие умножения матрицы на матрицу обладает с в о й с т в а м и:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T, \mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$$

Последнее свойство показывает, что единичная матрица **E** среди всех квадратных матриц данного порядка выполняет такую же роль, как число единица среди чисел. Советуем читателю доказать, что никакая другая матрица в такой роли выступать не может. Указанным обстоятельством мы воспользуемся позже для того, чтобы ввести понятие обратной матрицы.

Произведение матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей: в общем случае

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

В отдельных случаях равенство  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  может иметь место — тогда матрицы **A** и **B** называются *перестановочными* между собой.

**ПРИМЕР 2.1.4.** Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить матрицы  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ ,  $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ .

**Решение.** Имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

значит,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 49 & 56 \\ 49 & 42 & 63 \\ 56 & 63 & 147 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 & 65 & 21 & 71 \\ 65 & 90 & 35 & 45 \\ 21 & 35 & 14 & 14 \\ 71 & 45 & 14 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = (6 \quad 4 \quad 2),$$

поэтому

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} (6 \quad 4 \quad 2) = \begin{pmatrix} 36 & 24 & 12 \\ 24 & 16 & 8 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T\mathbf{b} = (6 \quad 4 \quad 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 56. \quad \square$$

В примере 2.1.4 матрицы  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  имеют разные размеры, точно так же различаются размером матрицы  $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$  и  $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ . В следующем примере размеры матриц  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  совпадают, однако эти матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  не являются перестановочными.

**ПРИМЕР 2.1.5.** Нужно проверить, являются ли перестановочными матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Данные матрицы не являются перестановочными, поскольку

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix},$$

и  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .  $\square$

Если  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка, то ее можно умножить саму на себя, и произведение  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  также является квадратной матрицей  $n$ -го порядка. Матрицу  $\mathbf{A}^2$  можно умножить на матрицу  $\mathbf{A}$ , и тогда получится матрица  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \mathbf{AAA} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  того же порядка. Вообще,  $k$ -й степенью квадратной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется матрица

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ раз}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

По определению считается, что если  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ , то

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$$

(точно так же, как и нулевая степень ненулевого числа равна единице: если  $a \neq 0$ , то  $a^0 = 1$ ).

**ПРИМЕР 2.1.6.** Вычислить  $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0$ , где матрица  $\mathbf{A}$  задана в примере 2.1.5.

**Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A}^1 - 4\mathbf{A}^0 = \\ &= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 60 & 82 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

В экономике и управлении матрицы очень важны. Рассмотрим одну из типичных задач — **задачу планирования производства**.

Предприятие может выпускать  $n$  видов продукции, используя для этого  $m$  видов ресурсов. Известна технологическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции [элемент  $a_{ij}$  этой матрицы равен количеству ресурса  $i$ -го вида ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), которое необходимо затратить в процессе производства единицы продукции  $j$ -го вида ( $j = 1, 2, \dots, n$ )]. Каждый из столбцов технологической матрицы описывает некоторую технологию, т. е. процесс превращения ресурсов в конечный продукт.

Известен также вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

имеющихся в распоряжении предприятия объемов ресурсов и вектор

$$\mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)$$

удельной прибыли предприятия (т. е.  $c_j$  — это прибыль, которую предприятие получает от реализации единицы продукции  $j$ -го вида).

Требуется составить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую прибыль с учетом ограниченности запасов ресурсов (вспомним: пример такой задачи мы рассматривали во введении).

Если обозначить через  $x_j$  план производства продукции  $j$ -го вида, то производственная программа предприятия будет задаваться вектором

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Суммарный расход первого ресурса на производство всей продукции (всех видов), равный

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

не может быть больше запаса первого ресурса  $b_1$ :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1.$$

Аналогичные требования должны выполняться и для расходов других ресурсов:

$$\begin{array}{cccc} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq & b_m. \end{array}$$

Прибыль предприятия от реализации всей произведенной продукции равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Цель состоит в том, чтобы подобрать отыскать такой план производства (2.1.12), который обеспечит предприятию наибольшую прибыль:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.1.13)$$

при ограничениях по заданным ресурсам

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.1.14)$$

где по смыслу задачи

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.15)$$

Задачу (2.1.12)—(2.1.14) удобно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

## § 2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Итак, мы определили вектор как упорядоченную систему чисел и научились складывать векторы и умножать вектор на число. Известно, что аналогичные действия можно выполнять на множестве функций. Для того чтобы с единой точки зрения изучать различные множества объектов, на которых определены операции сложения и умножения на число, вводят понятие линейного пространства.

Множество  $\mathcal{L}$  элементов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  называется *линейным пространством*, если выполняются следующие условия:

- 1) имеется правило, которое позволяет построить для каждого двух элементов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из  $\mathcal{L}$  третий элемент из  $\mathcal{L}$ , называемый *суммой* элементов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначаемый  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ;
- 2) имеется правило, которое позволяет построить для каждого элемента  $\mathbf{a}$  из  $\mathcal{L}$  и любого действительного числа  $\lambda$  элемент  $\mathbf{a}'$  из  $\mathcal{L}$ , называемый *произведением элемента  $\mathbf{a}$  на число  $\lambda$*  и обозначаемый  $\lambda\mathbf{a}$ ;
- 3) существует элемент  $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$ , называемый *нулевым*, обладающий свойством (2.1.3), каков бы ни был элемент  $\mathbf{a}$ ; для каждого элемента  $\mathbf{a}$  из

$\mathcal{L}$  существует элемент  $-\mathbf{a} \in \mathcal{L}$ , называемый противоположным и обладающий свойством (2.1.4);

- 4) правила образования сумм элементов и произведения элементов на число удовлетворяют условиям (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.5)—(2.1.9).

Элементы линейного пространства условимся называть *векторами* независимо от их конкретной природы.

Множество всех  $n$ -мерных векторов — упорядоченных систем действительных чисел — образует линейное пространство в смысле данного определения. Это линейное пространство называется  *$n$ -мерным арифметическим линейным пространством* и обозначается  $\mathbb{R}^n$ .

Множество всех матриц одного и того же размера  $m \times n$  образует линейное пространство, которое обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

В качестве еще одного примера линейного пространства укажем совокупность всех многочленов степени, не превышающей данного натурального числа  $n$ , с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

Говорят, что в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  определено *скалярное произведение*, если имеется правило, которое позволяет каждой паре векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  поставить в соответствие некоторое число, обозначаемое  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , причем это соответствие обладает свойствами (2.1.11). Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

На множестве упорядоченных систем  $n$  чисел было определено скалярное произведение по формуле (2.1.10), и мы убедились, что условия (2.1.11) выполнены. Следовательно, арифметическое  $n$ -мерное пространство является евклидовым.

Упомянутые ранее линейные пространства матриц и многочленов также можно превратить в евклидовы, если определить подходящим образом скалярное произведение.

Пусть  $\mathcal{L}$  — линейное пространство, а  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$  — некоторое подмножество  $\mathcal{L}$ .

Подмножество  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  называется *подпространством* этого линейного пространства, если выполняются два условия:

- 1) для любых двух элементов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S}$  сумма этих элементов  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  также принадлежит  $\mathcal{S}$ ;
- 2) для любого элемента  $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$  и любого числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  произведением элемента  $\mathbf{a}$  на число  $\lambda$   $\lambda \mathbf{a}$  также принадлежит  $\mathcal{S}$ .

Очевидно, у любого линейного пространства  $\mathcal{L}$  существуют два подпространства, называемых тривиальными: это само пространство  $\mathcal{L}$  и нулевое подпространство  $\{\mathbf{0}\}$ , состоящее только из нулевого элемента.

**ТЕОРЕМА.** Если  $\mathcal{S}$  — подпространство некоторого линейного пространства  $\mathcal{L}$ , то  $\mathcal{S}$  само является линейным пространством.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему.

**ТЕОРЕМА.** Если  $S_1, S_2$  — два подпространства некоторого линейного пространства  $\mathcal{L}$ , то  $S_1 \cap S_2$  также является подпространством  $\mathcal{L}$ .

**Доказательство.** Если  $\mathbf{a} \in S_1 \cap S_2$  и  $\mathbf{b} \in S_1 \cap S_2$ , то это означает, что  $\mathbf{a} \in S_1, \mathbf{a} \in S_2, \mathbf{b} \in S_1, \mathbf{b} \in S_2$ , поэтому  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in S_1, \mathbf{a} + \mathbf{b} \in S_2$  и  $\lambda \mathbf{a} \in S_1, \lambda \mathbf{a} \in S_2$  для любого числа  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а значит,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in S_1 \cap S_2$  и  $\lambda \mathbf{a} \in S_1 \cap S_2$ , откуда и следует, что  $S_1 \cap S_2$  является подпространством  $\mathcal{L}$ .  $\square$

Заметим, что объединение двух подпространств в общем случае уже не будет подпространством.

Говорят, что  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{b}$  является *линейной комбинацией*  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ , если его можно представить как сумму произведений данных векторов на какие-нибудь числа  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{b} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k,$$

при этом числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  называются *коэффициентами линейной комбинации*.

Система  $n$ -мерных векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \tag{2.2.1}$$

называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов системы, и *линейно независимой* в противном случае.

**ТЕОРЕМА О ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ.** Система векторов (2.2.1) является линейно зависимой тогда и только тогда, когда существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{2.2.2}$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть система векторов (2.2.1) линейно зависима, и например, вектор  $\mathbf{a}_i$  является линейной комбинацией остальных векторов:

$$\mathbf{a}_i = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + t_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + t_k \mathbf{a}_k.$$

Пусть  $\lambda_1 = t_1, \lambda_2 = t_2, \dots, \lambda_{i-1} = t_{i-1}, \lambda_i = -1, \lambda_{i+1} = t_{i+1}, \dots, \lambda_k = t_k$ , тогда  $\lambda_i \neq 0$ , при этом

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \lambda_i \mathbf{a}_i + \lambda_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \\ = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i + t_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

что доказывает необходимость выполнения условий (2.2.2) для линейной зависимости векторов.

**Достаточность.** Пусть выполняются условия (2.2.2), причем хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  не равно нулю. Пусть это будет  $\lambda_j \neq 0$ . Тогда

$$\mathbf{a}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \mathbf{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \mathbf{a}_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \mathbf{a}_{j+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \mathbf{a}_k,$$

или

$$\mathbf{a}_i = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + t_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + t_k \mathbf{a}_k,$$

где

$$t_1 = -\lambda_1 / \lambda_j, t_2 = -\lambda_2 / \lambda_j, \dots, t_{j-1} = -\lambda_{j-1} / \lambda_j, t_{j+1} = -\lambda_{j+1} / \lambda_j, \dots, t_k = -\lambda_k / \lambda_j,$$

что и доказывает достаточность условий (2.2.2) для линейной зависимости векторов.  $\square$

Теорему о линейной зависимости можно переформулировать так: *система векторов (2.2.1) является линейно независимой тогда и только тогда, когда равенство (2.2.2) возможно только в случае, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$* . Предлагаем читателю убедиться что обе формулировки этой теоремы эквивалентны.

**ТЕОРЕМА.** Если среди векторов некоторой системы имеется нуль-вектор, то такая система векторов линейно зависима.

**Доказательство.** Если среди векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  имеется нуль-вектор, например,  $\mathbf{a}_i = \mathbf{\theta}$ , то можно положить  $\lambda_i = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_k = 0$ , и тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + \lambda_i \mathbf{a}_i + \lambda_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \\ = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \dots + 0\mathbf{a}_{i-1} + 1\mathbf{\theta} + 0\mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{\theta}, \end{aligned}$$

значит, система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  является линейно зависимой (по теореме о линейной зависимости).  $\square$

**ТЕОРЕМА.** Если некоторая подсистема  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l$  системы векторов линейно зависима, то и вся система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_{l+1}, \dots, \mathbf{a}_k$  линейно зависима.

**Доказательство.** Если подсистема  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l$  является линейно зависимой, то

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_l \mathbf{a}_l = \mathbf{\theta},$$

где хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  отлично от нуля, значит,

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_l \mathbf{a}_l + 0\mathbf{a}_{l+1} + 0\mathbf{a}_{l+2} + \dots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{\theta},$$

т. е. система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_{l+1}, \dots, \mathbf{a}_k$  является линейно зависимой (по теореме о линейной зависимости).  $\square$

Принято называть  $n$ -мерные векторы

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad (2.2.3)$$

единичными векторами  $n$ -мерного линейного пространства. Нетрудно видеть, что система единичных векторов  $n$ -мерного линейного пространства линейно независима.

**ТЕОРЕМА.** Любой вектор  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  может быть представлен в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ :

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n.$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, a_n) = \\ &= a_1(1, 0, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, 0, \dots, 1) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n,\end{aligned}$$

что и доказывает теорему.  $\square$

Приведем без доказательства еще три теоремы о линейной зависимости векторов.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$  линейно выражаются через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ . Если  $m > k$ , т. е. число линейных комбинаций больше числа данных векторов, то векторы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$  линейно зависимы.

**ТЕОРЕМА.** Если векторы двух конечных систем линейно независимых векторов линейно выражаются друг через друга, то эти системы имеют одинаковое число векторов.

**ТЕОРЕМА.** Если в системе  $n$ -мерных векторов число векторов  $m$  больше размерности векторов, т. е.  $m > n$ , то такая система векторов линейно зависима.

Пусть дана система  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  и из нее выделена некоторая подсистема векторов  $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ . Условимся называть эту подсистему *базисом* данной системы векторов, если векторы подсистемы линейно независимы, а любой вектор исходной системы является линейной комбинацией векторов подсистемы.

Очевидно, что если добавить к базису  $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$  системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  произвольный вектор  $\mathbf{a}_j$  этой системы, то система  $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_j$  будет линейно зависима.

**ТЕОРЕМА.** Любые два базиса одной и той же системы содержат одинаковое число векторов.

Эта теорема позволяет ввести новое понятие. Число векторов в произвольном базисе системы векторов называется *рангом системы векторов*.

До сих пор мы применяли понятия базиса и ранга к системе, состоящей из конечного числа векторов. Теперь распространим эти понятия на системы с бесконечным числом векторов, так как согласно этой теореме базис любой такой системы состоит из конечного числа векторов, не превосходящего их размерности.

В частности, можно говорить о базисе и ранге всех  $n$ -мерных векторов, т. е.  $n$ -мерного линейного пространства. Одним из базисов этого линейного пространства является *единичный базис* — система единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ . Так как число векторов в этой системе равно  $n$ , то любой базис  $n$ -мерного линейного пространства должен содержать ровно  $n$  векторов. Поэтому часто говорят: *набор любых  $n$  линейно независимых векторов  $n$ -мерного линейного пространства называется базисом этого линейного пространства*.

**ТЕОРЕМА.** *Всякий вектор  $n$ -мерного линейного пространства можно, и притом единственным образом, разложить по векторам базиса этого линейного пространства.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — какой-нибудь базис, а  $\mathbf{x}$  — произвольный вектор  $n$ -мерного линейного пространства. Система  $n + 1$  векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{x}$  линейно зависима, т. е.  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , где  $\lambda_{n+1} \neq 0$  (в противном случае векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  были бы линейно зависимы). Если положить  $x_i = -\lambda_i / \lambda_{n+1}$ , то можно выразить  $\mathbf{x}$  через  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  следующим образом:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n,$$

что и доказывает теорему.  $\square$

Коэффициенты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  разложения вектора  $\mathbf{x}$  по векторам базиса  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *координатами* вектора  $\mathbf{x}$  в данном базисе. В силу единственности линейного выражения вектора через линейно независимые векторы, как было доказано ранее, координаты вектора в данном базисе определяются однозначно. Координаты вектора, определенные при введении понятия вектора, — это коэффициенты разложения данного вектора по единичному базису.

Пусть дана прямоугольная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Можно доказать, что ранг системы строк

$$(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}), (a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}), \dots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}).$$

произвольной матрицы  $\mathbf{A}$  равен рангу системы ее столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Данный результат позволяет ввести новое понятие: *рангом матрицы* называется максимальное число ее линейно независимых параллельных рядов. Обозначается ранг матрицы  $\mathbf{A}$  так:  $\text{rg } \mathbf{A}$ . Очевидно, что если  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , то  $\text{rg } \mathbf{A} \leq \min\{m, n\}$

Под *элементарными преобразованиями матрицы* будем понимать преобразования трех типов:

- перемена местами двух каких-нибудь строк;
- умножение всех элементов одной из строк матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам одной из строк матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Несложно доказать такую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Эта теорема дает способ вычисления ранга матрицы: с помощью элементарных преобразований матрицу приводят (с точностью до перестановки столбцов) к виду

$$r \text{ строк} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где звездочками обозначены произвольные числа, при этом ранг исходной матрицы равен рангу преобразованной матрицы, а ранг преобразованной матрицы, очевидно, равен  $r$ .

**ПРИМЕР 2.2.1.** Требуется найти базис и ранг системы векторов — строк матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Преобразуем матрицу  $\mathbf{A}$  с помощью элементарных преобразований. Процесс элементарных преобразований иллюстрируется табл. 2.2.1.

Т а б л и ц а 2.2.1

А			Примечания
0	1	2	II → I
4	0	1	I → II
3	-1	1	III → III
4	0	1	(1/4)·I → I
0	1	2	II → II
3	-1	1	III → III
1	0	1/4	I → I
0	1	2	II → II
3	-1	1	III - 3·I → III
1	0	1/4	I → I
0	1	2	II → II
0	-1	1/4	III + II → III
1	0	1/4	I - (1/9)·III → I
0	1	2	II - (8/9)·III → II
0	0	9/4	(4/9)·III → III
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	

Таким образом, исходная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

с помощью элементарных преобразований приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда следует что три строки матрицы **A**:

$$(0 \ 1 \ 2), (4 \ 0 \ 1), (3 \ -1 \ 1) \quad (2.2.4)$$

представляют собой линейно независимую систему векторов

Эти три вектора (2.2.4) и образуют базис системы векторов — строк матрицы **A**. Ранг системы векторов равен числу векторов в базисе этой системы, т. е., в данном случае, трем.  $\square$

**ПРИМЕР 2.2.2.** Нужно определить ранг матрицы **A** из примера 2.2.1.

**Решение.** Ранг матрицы равен рангу системы векторов — строк этой матрицы, т. е., согласно решению примера 2.2.1,  $\text{rg } \mathbf{A} = 3$ .  $\square$

Прямая линия с заданным на ней направлением называется *осью*. Если выбрать на оси некоторую точку *O*, называемую *началом координат*, и задать е д и н и ц у и з м е р е н и я (масштаба), то тем самым мы зададим *систему координат на прямой*.

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом координат и одинаковой единицей измерения образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одна из осей называется *осью абсцисс* и обозначается  $Ox_1$ , другая — *осью ординат* ( $Ox_2$ ), а сама система координат обозначается  $x_1Ox_2$ .

Аналогичным образом можно ввести декартову прямоугольную систему координат и в трехмерном пространстве.

Проекции точки на координатные оси называются *координатами* этой точки. Очевидно, любая точка однозначно задается своими координатами.

С произвольной точкой однозначным образом  $M$  связан так называемый *радиус-вектор* этой точки, т. е. вектор, имеющий те же координаты, что и точка  $M$ . С геометрической точки зрения радиус-вектор точки  $M$  — это вектор  $\overrightarrow{OM}$ , началом которого является начало координат  $O$ , а концом — данная точка  $M$ .

На рис. 2.2.1 изображена декартова прямоугольная система координат на плоскости. В этой системе координат отмечены точки  $A(1, 4)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-1, 2)$  и  $D(1, -1)$ . С этими точками связаны их радиус-векторы  $\mathbf{a} = (1, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 2)$  и  $\mathbf{d} = (1, -1)$ .

Теперь операции над векторами получают наглядную **геометрическую интерпретацию**.

Для того, чтобы получить сумму векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , нужно вектор  $\mathbf{b}$  отложить из конца вектора  $\mathbf{a}$  и в качестве результата  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  взять вектор с началом в начале вектора  $\mathbf{a}$  и с концом в конце вектора  $\mathbf{b}$ .

Чтобы получить вектор  $\lambda \mathbf{a}$ , нужно построить вектор, который имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{a}$ , если  $\lambda \geq 0$ , или противоположное направление, если  $\lambda < 0$ , а длину — в  $|\lambda|$  раз больше, чем длина вектора  $\mathbf{a}$ .

Построим на рис. 2.2.1, пользуясь этими правилами, векторы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $4\mathbf{d}$ . Их координаты  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 7)$ ,  $4\mathbf{d} = (-4, -4)$  совпадают с вычисленными по обычным формулам сложения векторов и умножения вектора на число из параграфа 2.1:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 7) = (1 + 2, 4 + 3), \quad 4\mathbf{d} = (-4, -4) = (-1 \cdot 4, -1 \cdot 4).$$

Аналогии между линейными пространствами произвольной природы и привычными нам прямой линией, плоскостью и обычным трехмерным пространством позволяют пойти дальше: ввести понятия длины вектора, угла между векторами и расстояния между точками в произвольном линейном пространстве.

*Длиной* вектора  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  называется число

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle},$$

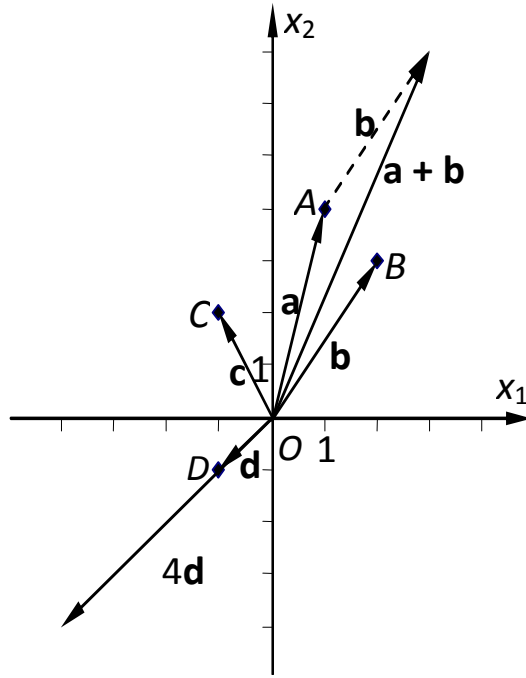


Рис. 2.2.1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости

**Неравенство Коши — Буняковского.** Скалярное произведение произвольных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не превосходит произведения их длин:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|. \quad (2.2.5)$$

**Доказательство.** Если  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , то  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ ,  $|\mathbf{a}| = 0$ , откуда и следует неравенство (2.2.1), превращающееся в этом случае в равенство. Пусть теперь  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и пусть  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  — некоторое число. Тогда по свойству скалярного произведения  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  [см. формулу (1.1.12)] или

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \alpha \mathbf{a} - \mathbf{b}, \alpha \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \alpha \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \alpha \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \alpha^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle, \end{aligned}$$

т. е. при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство

$$\alpha^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geq 0.$$

Так как  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , то  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \neq 0$  и можно положить  $\alpha = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ :

$$\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2 \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geq 0,$$

откуда

$$\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} - 2 \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \leq \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle.$$

Умножив левую и правую части последнего неравенства на одно и то же число  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ , получим:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle, \quad (2.2.6)$$

и чтобы теперь получить неравенство (2.2.1), достаточно взять квадратный корень из обеих (неотрицательных) частей неравенства (2.2.2) и вспомнить, что  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}$ . Справедливость неравенства доказана  $\square$

Поскольку из неравенства Коши — Буняковского следует, что если оба вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые, то

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \leq 1, \quad (2.2.7)$$

можно определить угол  $\varphi = \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  между ненулевыми векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  как такое число  $\varphi = [0, \pi]$ , что

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Читателю рекомендуется убедиться в справедливости неравенства (2.2.3).

**ПРИМЕР 2.2.2.** Требуется определить угол между векторами  $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, \sqrt{3})$ .

**Решение.** Вычисляем последовательно:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \sqrt{3}(-1) + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \cos(\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

откуда  $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \pi / 3 = 60^\circ$ . Рис. 2.2.2 подтверждает это наглядно.  $\square$

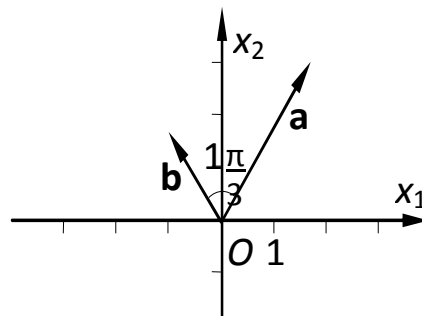


Рис. 2.2.2. Угол между векторами

Расстояние между точками  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  равно, очевидно, длине вектора  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$ :

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle}. \end{aligned}$$

В экономических исследованиях, планировании и управлении приходится рассматривать системы алгебраических уравнений со многими неизвестными величинами. Система из  $k$  уравнений первой степени с  $n$  неизвестными может быть записана в виде

[illegible]

где неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подлежат определению, а коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$  при неизвестных и свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_k$  уравнений заданы, притом первый индекс коэффициента совпадает с номером уравнения, в котором содержится данный коэффициент, второй индекс — с номером неизвестной, при которой этот коэффициент поставлен. Кратко запишем систему линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Совокупность чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , взятых в определенном порядке, называют *решением системы уравнений* (2.3.1), если они, будучи подставлены в уравнения системы на место соответствующих неизвестных, обращают все уравнения в тождества. Решение  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  системы (2.3.1) называют *неотрицательным*, если все его компоненты  $\alpha_i$  неотрицательны.

Система линейных алгебраических уравнений (2.3.1) называется *совместной*, если она имеет решение. Совместная система называется *определенной* или *неопределенной* в зависимости от того, имеет ли она од-

но или более решений. Система вида (2.3.1) называется *несовместной* или *противоречивой*, если она не имеет решения.

Две системы линейных алгебраических уравнений с одним и тем же числом неизвестных называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если они или обе несовместны, или обе совместны и имеют одни и те же решения; число уравнений в эквивалентных системах может быть различным. В процессе отыскания решений систему уравнений можно подвергать только таким преобразованиям, которые переводят ее в эквивалентные системы.

Относительно любой системы линейных алгебраических уравнений можно задать вопросы:

- совместна она или нет;
- если совместна, то каково число решений;
- как найти все решения.

Процесс отыскания ответов на первые два вопроса называется *исследованием системы*, а процесс отыскания решений — *решением системы*.

Мы рассмотрим метод Жордана — Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) для исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений, в котором процессы исследования и поиска решений совпадают.

Составим матрицу  $\mathbf{A}$  из коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений. Ее принято называть *матрицей системы* (2.3.1), а матрицу  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} | \mathbf{b})$ , получающуюся добавлением к  $\mathbf{A}$  столбца свободных членов системы (2.3.1), называют *расширенной матрицей*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, левые части уравнений системы (2.3.1) совпадают с элементами матрицы-произведения  $\mathbf{Ax}$ , поэтому систему линейных алгебраических уравнений (2.3.1) можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

**ПРИМЕР 2.3.1.** Нужно проверить, является ли вектор

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решением системы линейных уравнений, которая задана расширенной матрицей

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right).$$

**Решение.** Подставим координаты вектора  $\mathbf{u}$  вместо неизвестных в данную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 9 \neq 6, \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = 9 \neq 4, \\ 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) = 1 \neq 2. \end{cases}$$

Так как вычисленные значения не совпадают с координатами вектора  $\mathbf{b}$ , то вектор  $\mathbf{u}$  не является решением данной системы уравнений.  $\square$

*Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений* называют преобразования следующих трех типов:

- перестановка двух каких-нибудь уравнений системы;
- умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Нетрудно видеть, что элементарные преобразования переводят данную систему линейных алгебраических уравнений в эквивалентную систему.

Подвергая систему линейных алгебраических уравнений элементарным преобразованиям, можно исключить любую неизвестную из всех уравнений, кроме какого-нибудь одного уравнения. Предположим, что в системе уравнений (2.3.1) коэффициент  $a_{rs}$  отличен от нуля и что мы решили исключить неизвестную  $x_s$  из всех уравнений системы, кроме  $r$ -го уравнения. Назовем  $a_{rs}$  *разрешающим коэффициентом*,  $x_s$  — *разрешающей неизвестной*, уравнение с номером  $r$  — *разрешающим уравнением*. Систему уравнений (2.3.1) перепишем в виде

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{is}x_s + \dots + a_{in}x_n = b_i, & i \neq r, \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Если умножить  $r$ -е уравнение системы на какое-нибудь число  $\lambda$  и прибавить к  $i$ -му уравнению, то все коэффициенты при неизвестных и свободный член  $i$ -го уравнения изменятся и примут значения

$$a'_{ij} = a_{ij} + \lambda a_{rj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad b'_i = b_i + \lambda b_r.$$

Неизвестная  $x_s$  исключается из  $i$ -го уравнения, если коэффициент при ней станет равным нулю:

$$a'_{is} = a_{is} + \lambda a_{rs} = 0, \tag{2.3.2}$$

для этого необходимо взять

$$\lambda = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}. \quad (2.3.3)$$

Исключив таким образом неизвестную  $x_s$  из всех уравнений системы (2.3.1), кроме разрешающего уравнения, разделим последнее на разрешающий коэффициент. Система (2.3.1) перейдет в следующую эквивалентную ей новую систему

$$\begin{cases} a'_{i1}x_1 + \dots + a'_{i,s-1}x_{s-1} + a'_{i,s+1}x_{s+1} + \dots + a'_{in}x_n = b'_i, & i \neq r, \\ a'_{r1}x_1 + \dots + a'_{r,s-1}x_{s-1} + x_s + a'_{r,s+1}x_{s+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r, \end{cases}$$

где неизвестная  $x_s$  содержится только в  $r$ -м уравнении, притом с коэффициентом единица, а остальные коэффициенты при неизвестных и свободные члены связаны с коэффициентами и свободными членами исходной системы (2.3.1), как видно из соотношений (2.3.2) и (2.3.3), формулами:

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}}a_{rj}, & b'_i = b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}}b_r, & i \neq r, \\ a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, & b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}}, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

которые называются *формулами исключения*.

Формулы исключения удобно применять с помощью **правила прямоугольника**, суть которого состоит в том, что для получения нового элемента  $a'_{ij}$  (или  $b'_i$ ) надо из преобразуемого элемента  $a_{ij}$  (или  $b_i$ ) вычесть произведение элементов, расположенных в оставшихся противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент (рис. 2.3.1).

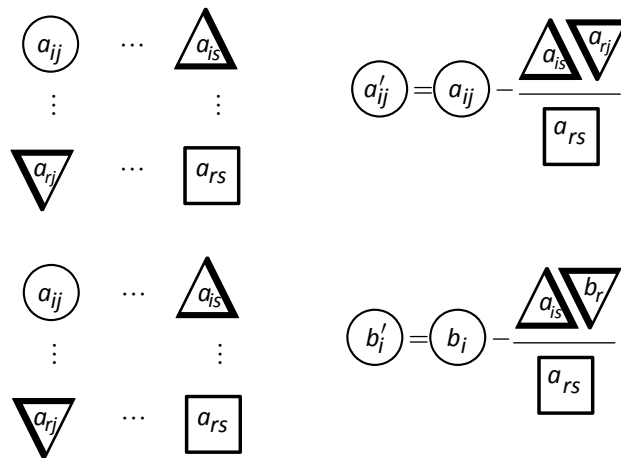


Рис. 2.3.1. Правило прямоугольника

Можно предположить, не теряя общности, что в системе линейных алгебраических уравнений (2.3.1) коэффициент  $a_{11}$  отличен от нуля. Примем этот коэффициент за разрешающий и исключим по указанным выше правилам неизвестную  $x_1$  из всех уравнений системы, кроме первого уравнения.

Система (2.3.1) преобразуется в новую систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную данной, притом число уравнений в новой системе может быть меньше, чем в исходной, так как в процессе преобразований могли появиться уравнения вида

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0,$$

называемые *нуль-уравнениями*, которые мы отбрасываем. Далее мы исключим из всех уравнений новой системы, кроме второго, следующую неизвестную, например  $x_2$ , если коэффициент при ней в новой системе отличен от нуля, и т. д., если не появилось уравнение вида

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b, \quad b \neq 0. \quad (2.3.5)$$

Процесс последовательного исключения неизвестных закончится либо тогда, когда мы придем к системе, содержащей уравнение вида (2.3.5), что будет означать несовместность исследуемой системы (2.3.1), либо тогда, когда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 & & + g_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{1n}x_n = h_1, \\ & x_2 & + g_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{2n}x_n = h_2, \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & x_m & + g_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{mn}x_n = h_m. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Система уравнений (2.3.6) эквивалентна системе (2.3.1), притом  $m \leq k$ . Будем говорить, что система линейных алгебраических уравнений (2.3.1) приведена к *предпочитаемому* или *каноническому виду* (2.3.6); неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  будем называть *базисными*,  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  — *свободными*. Особенность системы (2.3.6) в том, что в каждом уравнении содержится неизвестная с коэффициентом, равным единице, которая ни в какое другое уравнение не входит, т. е. коэффициенты при базисных неизвестных образуют единичную подматрицу матрицы системы (возможно, после некоторой перестановки уравнений и перенумерации неизвестных). Кратко эту систему записывают в виде

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n g_{ij}x_j = h_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Число уравнений в системе (2.3.6) не больше числа неизвестных:  $m \leq n$ . При  $m = n$  система (2.3.6) имеет вид

$$x_1 = h_1, x_2 = h_2, \dots, x_n = h_n,$$

т. е. система линейных алгебраических уравнений (2.3.1) является совместной и определенной. Если же  $m < n$ , то возьмем для свободных неизвестных какие-нибудь значения  $x_{m+1} = \alpha_{m+1}, x_{m+2} = \alpha_{m+2}, \dots, x_n = \alpha_n$ , тогда базисные неизвестные примут вполне определенные значения  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_m = \alpha_m$ . Система чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$  будет служить решением системы (2.3.6) и, следовательно, системы (2.3.1). Так как значения свободных неизвестных можно выбирать произвольным образом, то таким путем можно найти много решений системы (2.3.1), называемых ее *частными решениями*, т. е. в этом случае система является совместной и неопределенной. Выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 - g_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - g_{1n}x_n, \\ x_2 = h_2 - g_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - g_{2n}x_n, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_m = h_m - g_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - g_{mn}x_n \end{cases}$$

естественно назвать *общим решением* системы линейных алгебраических уравнений (2.3.1). Среди частных решений системы выделяется *базисное*, отвечающее нулевым значениям свободных неизвестных:

$$x_1 = h_1, x_2 = h_2, \dots, x_n = h_n, x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0. \quad (2.3.7)$$

Руководствуясь правилами исключения, мы можем продолжить процесс преобразований системы (2.3.1) и найти другие ее предпочитаемые эквиваленты и соответствующие им базисные решения.

Предположим, что в системе уравнений (2.3.6) коэффициент при свободной неизвестной  $x_s$  в  $r$ -м уравнении отличен от нуля. Примем этот коэффициент за разрешающий и исключим неизвестную  $x_s$  из всех уравнений системы (2.3.6), кроме  $r$ -го уравнения, после чего система уравнений (2.3.6) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_i + g'_{ir}x_r + \sum_{j=m+1}^{n(j \neq s)} g'_{ij}x_j = h'_i, & i \neq r, \\ x_s + g'_{rr}x_r + \sum_{j=m+1}^{n(j \neq s)} g'_{rj}x_j = h'_r. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений (2.3.7) эквивалентна системе (2.3.1). Будем говорить, что система (2.3.1) приведена к новому предпочитаемому виду (2.3.7). Неизвестная  $x_s$  стала базисной, а  $x_r$  —

свободной, т. е. неизвестные  $x_r$  и  $x_s$  поменялись ролями. Выражая новые базисные неизвестные через новые свободные, можно получить новую запись общего решения системы (2.3.1). Приравнявая новые свободные неизвестные к нулю, получаем соответствующее системе (2.3.7) новое базисное решение:

$$\begin{cases} x_i = h'_i, & i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m, \\ x_r = 0, & x_s = h'_s, \\ x_j = 0, & j = m+1, m+2, \dots, s-1, s+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Далее мы можем принять следующую свободную неизвестную за разрешающую и перевести ее в число базисных, преобразовав систему уравнений к следующему предпочитаемому виду, и т. д. Исследуемая система уравнений имеет не более  $C_n^m$  предпочитаемых эквивалентов и соответственно базисных решений, ибо не может быть двух различных предпочитаемых эквивалентов системы (2.3.1) с одним и тем же набором базисных неизвестных.

**ПРИМЕР 2.3.2.** Найти общее решение и два различных базисных решения системы линейных уравнений из примера 2.3.1.

**Решение.** Воспользуемся методом Жордана — Гаусса. Вычислительный процесс иллюстрируется табл. 2.3.1.

Т а б л и ц а 2.3.1

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>b</b>
2	7	3	1	6
3	5	2	2	4
9	4	1	7	2
1	7/2	3/2	1/2	3
0	-11/2	-5/2	1/2	-5
0	-55/2	-25/2	-5.2	-25
1	0	-1/11	9/11	-2/11
0	1	5/11	-1/11	10/11
0	0	0	0	0

В результате исходная система линейных уравнений

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right)$$

приведена с помощью элементарных преобразований к эквивалентной системе

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \end{array} \right)$$

или

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11}, \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11}, \end{cases}$$

т. е. к системе линейных уравнений в предпочитаемой форме. Выбрав переменные  $x_1$  и  $x_2$  в качестве базисных, а  $x_3$  и  $x_4$  — в качестве свободных, выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4, \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4. \end{cases}$$

Общее решение данной системы линейных уравнений получим, придавая свободным переменным  $x_3$  и  $x_4$  произвольные вещественные значения  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/11 \\ 10/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1/11 \\ -5/11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -9/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Базисное решение получим при  $\alpha = \beta = 0$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/11 \\ 10/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если в качестве базисных переменных выбрать  $x_1$  и  $x_4$ , то вычислительный процесс метода Жордана — Гаусса будет таким, как показано в табл. 2.3.2.

Соответствующее общее решение таково:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}.$$

Базисное решение получим при  $\gamma = \delta = 0$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что две полученных формулы общего решения по разному описывают одно и то же множество всех решений исходной системы линейных уравнений.

Также заметим, что можно было бы для получения нового базисного решения продолжить процесс преобразований, начатый в табл. 2.3.1 — такой подход иллюстрируется табл. 2.3.3.  $\square$

Т а б л и ц а 2.3.2

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>b</b>
2	7	3	1	6
3	5	2	2	4
9	4	1	7	2
1	7/2	3/2	1/2	3
0	-11/2	-5/2	1/2	-5
0	-55/2	-25/2	5/2	-25
1	9	4	0	8
0	-11	-5	1	-10
0	0	0	0	0

Т а б л и ц а 2.3.3

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>b</b>
2	7	3	1	6
3	5	2	2	4
9	4	1	7	2
1	7/2	3/2	1/2	3
0	-11/2	-5/2	1/2	-5
0	-55/2	-25/2	-5/2	-25
1	0	-1/11	9/11	-2/11
0	1	5/11	-1/11	10/11
0	0	0	0	0
1	9	4	0	8
0	-11	-5	1	-10
0	0	0	0	0

## § 2.4. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучим вопрос поиска неотрицательных решений системы линейных алгебраических уравнений (2.3.1). Не теряя общности, можно считать, что правые части всех уравнений системы (2.3.1) неотрицательны. Последовательно исключая неизвестные, мы можем привести эту систему к предпочитаемому виду (2.3.6), затем — (2.3.8). Если правые части всех уравнений полученных систем окажутся неотрицательными, то соответствующие базисные решения (2.3.7) и (2.3.9) будут неотрицательными. Следовательно, чтобы получить неотрицательные базисные решения системы линейных уравнений, надо научиться вести процесс исключения неизвестных так, чтобы свободные члены всех уравнений на всех этапах процесса оставались неотрицательными. Покажем, что для этого достаточно выбирать разрешающие коэффициенты по определенным правилам.

Рассмотрим, для определенности, переход от системы (2.3.6) к (2.3.8). Свободные члены системы (2.3.8) связаны с коэффициентами при неизвестных и свободными членами системы (2.3.6) формулами исключения:

$$h'_i = h_i - \frac{g_{is}}{g_{rs}} h_r, \quad i \neq r.$$

Мы предполагаем, что правые части всех уравнений системы (2.3.6) неотрицательны, и требуем, чтобы правые части уравнений системы (2.3.8) также были неотрицательными. Оставив в стороне случай  $h_r = 0$ , когда правые части уравнений не изменяются, сразу же замечаем, что разрешающий элемент должен быть положительным:

$$g_{rs} > 0,$$

т. е. в качестве разрешающей можно принять только такую неизвестную, при которой хотя бы в одном уравнении имеется положительный коэффициент. Если же разрешающая неизвестная выбрана, то разрешающее уравнение должно быть выбрано так, чтобы

$$h'_i = h_i - \frac{g_{is}}{g_{rs}} h_r > 0, \tag{2.4.1}$$

откуда следует, что

$$\frac{h_r}{g_{rs}} = \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \frac{h_i}{g_{is}} > 0 \right).$$

Особо подчеркнем, что минимум берется по всем тем индексам  $i$ , где  $g_{is} > 0$ , так как справедливость неравенств вида (2.4.1) при  $g_{is} \leq 0$  не вызывает сомнений.

Таким образом, для того чтобы при последовательном исключении неизвестных для приведения системы линейных алгебраических уравнений к предпочитаемому виду или перехода от одного предпочитаемого вида к другому свободные члены всех уравнений системы оставались неотрицательными, необходимо руководствоваться следующими правилами выбора разрешающей неизвестной и разрешающего уравнения. В качестве разрешающей неизвестной можно принять любую неизвестную, при которой есть хоть один положительный коэффициент, а затем в качестве разрешающего уравнения следует взять то уравнение, которое соответствует наименьшему среди отношений свободных членов уравнений к соответствующим положительным коэффициентам при выбранной неизвестной в этих уравнениях. Условимся говорить, что система линейных алгебраических уравнений подвергается *симплексным преобразованиям*, если процесс исключения неизвестных осуществляется в соответствии с указанными правилами выбора разрешающей неизвестной и разрешающего уравнения.

Может случиться, что указанное минимальное отношение достигается при нескольких значениях индекса  $i$ . Тогда любое из соответствующих им уравнений можно принять за разрешающее. Принято говорить в этом случае, что рассматриваемая система линейных алгебраических уравнений является вырожденной. Характерная особенность вырожденной системы в том, что после выполнения очередного преобразования, как нетрудно видеть, один или несколько свободных членов обращаются в нуль. На этом основании *вырожденной системой линейных алгебраических уравнений* называют такую систему, у которой в какой-либо предпочитаемой форме хотя бы один свободный член равен нулю.

Остается заметить, что система не будет иметь ни одного неотрицательного решения, если в процессе симплексных преобразований в ней появится уравнение, в котором свободный член строго положителен, а среди коэффициентов при неизвестных нет ни одного положительного.

Будем теперь искать *не базисные* неотрицательные решения системы уравнений (2.3.1), по-прежнему считая, что правые части уравнений во всех системах неотрицательны. В общем решении будем придавать различные неотрицательные значения только одной свободной неизвестной, например  $x_s$ , сохранив значения остальных свободных неизвестных равными нулю, так, чтобы базисные неизвестные принимали неотрицательные значения. Если  $g_{1s} < 0, g_{2s} < 0, \dots, g_{ms} < 0$ , то неизвестной  $x_s$  можно дать любое положительное значение

$$0 \leq x_s < +\infty ;$$

если же при неизвестной  $x_s$  хотя бы в одном уравнении системы (2.3.1) имеется положительный коэффициент, то  $x_s$  может изменяться лишь в ограниченной области:

$$0 \leq x_s < \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \frac{h_i}{g_{is} > 0} \right); \quad (2.4.2)$$

При любом значении  $x_s$ , взятом из этой области, соответствующее частное решение будет неотрицательным. Границами замкнутой области (2.4.2) отвечают крайние решения, которые, как нетрудно видеть, совпадают с базисными неотрицательными решениями. Поэтому в линейном программировании вместо крайнего решения, отвечающего верхней границе, мы будем искать соответствующее базисное неотрицательное решение.

**ПРИМЕР 2.4.1.** Найти базисное неотрицательное решение системы линейных уравнений из примера 2.3.1, выбрав в качестве базисных неизвестных  $x_2$  и  $x_3$ .

**Решение.** Вычислительный процесс иллюстрируется табл. 2.4.1.

Т а б л и ц а 2.4.1

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<b>b</b>	Примечания
2	7	3	1	6	$\min_{i=1,2,3} \left( \frac{h_i}{g_{i1} > 0} \right) = \min \left\{ \frac{6}{7}, \frac{4}{5}, \frac{2}{4} \right\} = \frac{2}{4}$
3	5	2	2	4	
9	4	1	7	2	
-55/4	0	5/4	-45/4	10/4	$\min_{i=1,2,3} \left( \frac{h_i}{g_{i2} > 0} \right) = \min \left\{ \frac{10/4}{5/4}, \frac{6/4}{3/4}, \frac{2/4}{1/4} \right\} = 2$
-33/4	0	3/4	-27/4	6/4	
9/4	1	1/4	7/4	2/4	
-11	0	1	-9	2	
0	0	0	0	0	
5	1	0	4	0	

Дадим к этой таблице некоторые комментарии. На первом шаге метода Жордана — Гаусса мы выбрали в качестве разрешающей неизвестную  $x_2$ . Чтобы определить разрешающее уравнение, разделим правые части уравнений на соответствующие коэффициенты при выбранной неизвестной, и среди полученных отношений найдем наименьшее:

$$\min_{i=1,2,3} \left( \frac{h_i}{g_{i1} > 0} \right) = \min \left\{ \frac{6}{7}, \frac{4}{5}, \frac{2}{4} \right\} = \frac{2}{4}.$$

Оно соответствует третьему уравнению системы. Поэтому за разрешающее принимаем третье уравнение и исключаем  $x_2$  из первого и второго уравнений.

На втором шаге метода Жордана — Гаусса в качестве разрешающей мы выбираем неизвестную  $x_3$ . Разделим правые части уравнений на соответствующие коэффициенты при выбранной неизвестной:

$$\min_{i=1,2,3} \left( \frac{h_i}{g_{i2} > 0} \right) = \min \left\{ \frac{10/4}{5/4}, \frac{6/4}{3/4}, \frac{2/4}{1/4} \right\} = 2.$$

Все три отношения оказались одинаковые (равные двум), поэтому любой элемент данного столбца можно выбрать в качестве разрешающего. В качестве разрешающего уравнения можно выбрать любое, кроме третьего, поскольку при выборе третьего уравнения в качестве разрешающего неизвестная  $x_3$  перестанет быть базисной.

Выберем в качестве разрешающего третье уравнение и продолжим процесс элементарных преобразований.

Таким образом, исходная система линейных уравнений

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right)$$

приведена с помощью элементарных преобразований к эквивалентной системе

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -11 & 0 & 1 & -9 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

или

$$\begin{cases} -11x_1 + x_3 - 9x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

Соответствующее базисное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## § 2.5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица. Если существует матрица  $\mathbf{B}$ , такая что произведение  $\mathbf{AB}$  совпадает с единичной матрицей ( $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ ), то говорят, что матрица  $\mathbf{A}$  *обратима*, при этом матрицу  $\mathbf{B}$  называют *обратной* к матрице  $\mathbf{A}$  и обозначают  $\mathbf{A}^{-1}$ . Таким образом, по определению,

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}. \quad (2.5.1)$$

Обратная матрица перестановочна с исходной, а матрица, обратная обратной, совпадает с исходной:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

Если для данной матрицы обратная матрица существует, то она определяется единственным образом.

Как узнать, является ли данная матрица

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

обратимой? Искомая матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

должна служить решением матричного уравнения (2.5.1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.2)$$

которое можно записать в виде системы  $n^2$  линейных алгебраических уравнений относительно  $n^2$  неизвестных элементов  $x_{ij}$  обратной матрицы.

Для этого умножим первую, вторую и т. д. строки матрицы  $\mathbf{A}$  на первый столбец обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  и, приравняв к соответствующим элементам первого столбца стоящей справа единичной матрицы, получим  $n$  линейных уравнений. Затем все строки данной матрицы последовательно умножим на второй столбец обратной матрицы и, приравняв к соответствующим элементам второго столбца единичной матрицы, получим еще  $n$  уравнений и т. д., т. е. получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5.3)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

*символ Кронекера.*

Вопрос о том, является ли данная матрица  $\mathbf{A}$  обратимой и если да, то как найти обратную матрицу, сводится к исследованию и решению системы линейных алгебраических уравнений специального вида (2.5.3).

Для решения системы (2.5.3) целесообразно воспользоваться методом Жордана. Как известно, этот метод не требует предварительного исследования системы уравнений на совместность — процессы исследования и решения происходят одновременно. Особенно важно то, что этим методом можно решать все  $n$  подсистем системы (2.5.3) одновременно, так как они имеют общую матрицу коэффициентов при неизвестных, совпадающую с данной матрицей  $\mathbf{A}$ . Выпишем матрицу  $\mathbf{A}$  и припишем к ней столбцы свободных членов всех  $n$  подсистем:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right). \quad (2.5.4)$$

Как обычно, будем подвергать элементарным преобразованиям систему строк этой вспомогательной матрицы. Приписанные столбцы свободных членов подсистем уравнений образуют единичную матрицу того же порядка, что и данная матрица  $\mathbf{A}$ . В случае совместности системы уравнений (2.5.3) на некотором этапе преобразований на месте матрицы  $\mathbf{A}$  получится единичная матрица и тогда каждый столбец пристроенной матрицы будет представлять решение соответствующей подсистемы уравнений, т. е. на месте приписанной единичной матрицы появится обратная матрица. Схема обращения невырожденной матрицы  $\mathbf{A}$  кратко может быть записана в виде

$$(\mathbf{A} | \mathbf{E}) \rightarrow (\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1}). \quad (2.5.5)$$

Если же на некотором этапе процесса преобразований вспомогательной матрицы (2.5.4) на месте одной из строк матрицы  $\mathbf{A}$  появится строка нулей, то это означает необратимость матрицы  $\mathbf{A}$ .

Вычисление обратной матрицы в Microsoft Excel производится с помощью функции

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{МОБР}(\text{матрица } \mathbf{A}),$$

где «матрица  $\mathbf{A}$ » — ссылка на ячейки рабочего листа, содержащие данную матрицу. Данная формула должна быть введена в рабочий лист как формула массива Microsoft Excel.

**ПРИМЕР 2.5.1.** Требуется найти (если это возможно) матрицу, обратную к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Припишем справа к матрице  $\mathbf{A}$  единичную матрицу, и с помощью элементарных преобразований строк приведем матрицу  $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$  к такому виду, чтобы на месте матрицы  $\mathbf{A}$  оказалась единичная матрица, тогда на месте единичной матрицы будет искомая матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ . Процесс элементарных преобразований иллюстрируется табл. 2.5.1.

В результате элементарных преобразований матрица

$$(\mathbf{A} | \mathbf{E}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

приведена к виду

$$(\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 2/3 & -8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/3 & 4/9 \end{array} \right).$$

Таблица 2.5.1

(A E)						Примечания
0	1	2	1	0	0	(1/4)·II → I
4	0	1	0	1	0	I → II
3	-1	1	0	0	1	III → III
1	0	1/4	0	1/4	0	I → I
0	1	2	1	0	0	II → II
3	-1	1	0	0	1	III - 3·I → III
1	0	1/4	0	1/4	0	I → I
0	1	2	1	0	0	II → II
0	-1	1/4	0	-3/4	1	III + II → III
1	0	1/4	0	1/4	0	I → I
0	1	2	1	0	0	II → II
0	0	9/4	1	-3/4	1	(1/3) III → III
1	0	1/4	0	1/4	0	I - (1/4) III → I
0	1	2	1	0	0	II - 2 III → II
0	0	1	4/9	-1/3	4/9	III → III
1	0	0	-1/9	1/3	-1/9	I - (1/4) III → I
0	1	0	1/9	2/3	-8/9	II - 2 III → II
0	0	1	4/9	-1/3	4/9	III → III

Таким образом, получена искомая обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 1/3 & -1/9 \\ 1/9 & 2/3 & -8/9 \\ 4/9 & -1/3 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку: по определению обратной матрицы должно выполняться равенство  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ . В нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1/9 & 3/9 & -1/9 \\ 1/9 & 6/9 & -8/9 \\ 4/9 & -3/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3)/9 & [-1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)]/9 & (-1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1)/9 \\ (1 \cdot 0 + 6 \cdot 4 - 8 \cdot 3)/9 & [1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 - 8 \cdot (-1)]/9 & (1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 8 \cdot 1)/9 \\ (4 \cdot 0 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3)/9 & [4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)]/9 & (4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1)/9 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} —$$

верно. Аналогично можно проверить, что  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ .  $\square$

## § 2.6. ОБРАЩЕННЫЙ БАЗИС СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система  $k$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными (2.3.1).

Исследуем ее, вычислив ранги матрицы системы и расширенной матрицы с помощью миноров. Предположим, что она оказалась совместной, все уравнения линейно независимы и пусть, для определенности, ненулевой минор  $M_k$  наивысшего порядка  $k$  (базисный минор) порождается подматрицей

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов при первых  $k$  неизвестных. Для матрицы  $\mathbf{Q}_k$  найдем обратную матрицу

$$\mathbf{Q}_k^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $\mathbf{Q}_k^{-1}$  называют *обращенным базисом*.

Запишем систему уравнений (2.3.1) в матричной форме и умножим обе части слева на матрицу  $\mathbf{Q}_k^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (2.6.1)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$g_{ij} = u_{i1}a_{1j} + u_{i2}a_{2j} + \dots + u_{ik}a_{kj}, \quad h_i = u_{i1}b_1 + u_{i2}b_2 + \dots + u_{ik}b_k$$

или

$$\mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (2.6.1) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & g_{1,k+1} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & g_{2,k+1} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{k,k+1} & \cdots & g_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

или

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & & + g_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + g_{1n}x_n = h_1, \\ & x_2 & + g_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + g_{2n}x_n = h_2, \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & x_k & + g_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + g_{kn}x_n = h_k. \end{array} \right. \quad (2.6.2)$$

Мы пришли к предпочитаемому эквиваленту исходной системы линейных алгебраических уравнений. Базисными оказались те неизвестные, из коэффициентов при которых был составлен ненулевой минор наивысшего порядка при исследовании системы. Особо подчеркнем, что матрицы-столбцы коэффициентов при неизвестных и свободных членов в исходной и предпочитаемой формах системы связаны соотношениями

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{h} = \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.6.8)$$

Из (2.6.2) получаем для исходной системы общее решение

[illegible]

Общее решение часто записывают в матричной форме:

$$\mathbf{x}^{\text{баз.}} = \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x}^{\text{своб.}},$$

где

$$\mathbf{x}^{\text{баз.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\text{своб.}} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

И еще одно важное замечание. Пусть  $\mathbf{a}_j$  — вектор-столбец, компонентами которого являются коэффициенты при неизвестной  $x_j$  в системе уравнений (2.3.1), а  $\mathbf{b}$  — вектор-столбец правых частей уравнений той же системы. В силу предположения векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  образуют базис системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2}, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ . Пусть  $\mathbf{g}_j$  — вектор-столбец коэффициентов при неизвестной  $x_j$  в предпочитаемой форме системы уравнений, а  $\mathbf{h}$  — столбец свободных членов. Тогда можно доказать, что координаты векторов  $\mathbf{g}_j$  и  $\mathbf{h}$  являются коэффициенты разложения векторов соответственно  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{b}$  по базисным векторам  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ :

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{g}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{g}_k \mathbf{a}_k, \quad j=1,2,\dots,n, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{h}_m \mathbf{a}_m.$$

## § 2.7. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Идеи модели межотраслевого баланса, рассматриваемой в данном разделе, впервые возникли в 1920-х гг. в работах экономистов молодой Советской России, которые строили модель плановой экономики, удовлетворяющей спрос конечных потребителей. Наибольшее развитие эти идеи получили в трудах В. Леонтьева, эмигрировавшего к тому времени в США. В 1973 г. за эти исследования В. Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия в области экономики.

Пусть производственный сектор национальной экономики разделен на  $n$  чистых отраслей (например, «машиностроение», «энергетика», «транспорт» и т. д.), каждая отрасль производит один вид продукции, различные отрасли выпускают разную продукцию. В процессе производства каждая отрасль может расходовать как свою продукцию, так и про-

дукцию других отраслей, поэтому на непроизводственное потребление, вообще говоря, идет не вся выпущенная продукция (часть ее тратится в процессе производства).

Введем обозначения:  $a_{ij}$  — количество продукции  $i$ -й отрасли, расходуемое в процессе производства единицы продукции  $j$ -й отрасли,  $x_i$  — план выпуска  $i$ -й отрасли,  $c_i$  — спрос на продукцию  $i$ -й отрасли в непроизводственной сфере.

Матрица  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  называется *матрицей прямых затрат*. Если считать сложившиеся производственные технологии неизменными во времени, то матрица  $\mathbf{A}$  будет постоянной.

Кроме того, будем считать технологии линейными: если для выпуска единицы продукции  $j$ -й отрасли необходимо израсходовать  $a_{ij}$  единиц продукции  $i$ -й отрасли, то для выпуска  $x_j$  единиц продукции  $j$ -й отрасли необходимо израсходовать  $a_{ij}x_j$  единиц продукции  $i$ -й отрасли.

В этих предположениях объем продукции  $i$ -й отрасли, потребляемый всеми  $n$  отраслями в процессе производства, равен

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

поэтому на конечное непроизводственное потребление остается

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

единиц продукции  $i$ -й отрасли.

Значит, чтобы конечный спрос был обеспечен, необходимо выполнение балансовых равенств

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти равенства можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad \text{или} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} —$$

вектор валового выпуска,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} —$$

вектор конечного непроеизводственного потребления,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} —$$

единичная матрица.

Из матричной формы модели Леонтьева

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

можно выразить зависимость вектора валового выпуска  $\mathbf{x}$  от вектора конечного непроеизводственного потребления  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c},$$

матрица  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  называется при этом *матрицей полных затрат*.

Модель Леонтьева называется *продуктивной*, если она разрешима в неотрицательных  $\mathbf{x}$ .

**ПРИМЕР 2.7.1.** В модели Леонтьева даны матрица прямых затрат

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного спроса

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти вектор  $\mathbf{x}$  валового выпуска, обеспечивающий данный спрос.

**Решение.** Найдем матрицу полных затрат  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix},$$

процесс вычисления матрицы  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 2.7.1.

Таблица 2.7.1

(A E)			
1/2	-1/4	1	0
-1/3	1/2	0	1
1	1/2	2	0
0	1/3	2/3	1
1	0	3	3/2
0	1	2	3

Теперь поясним, как получить тот же результат в пакете Microsoft Excel. Введем матрицу  $(E - A)$  в ячейки A2:C3 рабочего листа Microsoft Excel, как показано на рис. 3.2.1, а.

Матрица  $(E - A)^{-1}$  имеет две строки и два столбца, отведем под результат ячейки D2:E3. В ячейку D2 введем формулу «=МОБР(A2:B3)», причем эту формулу необходимо ввести как формулу массива. Для этого нужно мышью выделить диапазон D2:E3, начиная с ячейки D2, содержащей формулу, затем нажать клавишу <F2>, а затем — комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>. Результат представлен на рис. 3.2.1, б (в ячейках D2:E3). Замечаем, что результаты ручного и компьютерного вычисления обратной матрицы совпали. Если формулу ввести не как формулу массива, то будет рассчитан только левый верхний элемент результата: число 3.

	A	B	C	D	E
1	$E - A$			$(E - A)^{-1}$	
2	0,5	-0,25		=МОБР(A2:B3)	
3	– 0,33333	0,5			

а) формула Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1	$E - A$			$(E - A)^{-1}$	
2	0,5	-0,25		3	1,5
3	– 0,33333	0,5		2	3

б) результаты расчета

Рис. 3.2.1. Вычисление матрицы полных затрат с помощью Microsoft Excel

Таким образом, матрица полных затрат

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Теперь можно найти вектор валового выпуска, обеспечивающий конечный спрос  $c$ :

$$x = (E - A)^{-1} c = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Приведите примеры векторов и матриц из экономической практики.
2. Даны векторы  $\mathbf{a} = (15, -12, 2)$  и  $\mathbf{b} = (8, 16, 24)$ . Найдите  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle$ ,  $\langle 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle$ .
3. Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{d} = (5 \quad 2 \quad 3 \quad 1), \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Найдите матрицы  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{cd}$ ,  $\mathbf{dc}$ ,  $\mathbf{BE} - \mathbf{A}^T$ , если они существуют.
4. Найдите  $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$  и  $\mathbf{CD} - \mathbf{DC}$ , если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите ранги матриц из задач 3 и 4.
6. Исследуйте данные системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных и в случае совместности найдите общее решение, не менее двух базисных решений и какое-нибудь одно частное небазисное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

7. Найдите не менее двух базисных неотрицательных решений для каждой из систем, представленных в задаче 6.
8. Для данных матриц найдите обратные или докажите необратимость:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 12 & 4 & 7 \\ -7 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### § 3.1. Постановка задачи линейного программирования

**Основная задача линейного программирования** выглядит следующим образом.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3.1.1)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (3.1.2)$$
$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (3.1.3)$$

Требуется среди всех решений системы уравнений (3.1.1) найти такое неотрицательное решение, при котором целевая функция (3.1.3) принимает наибольшее возможное значение.

79

решением задачи линейного программирования (3.1.1)—(3.1.3). Кратко задачу формулируют так: найти вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , минимизирующий целевую функцию (3.1.3) при линейных ограничениях (3.1.1) и (3.1.2).

Мы остановились на вполне определенной формулировке основной задачи линейного программирования, имея в виду, что если в математической модели какой-либо конкретной задачи планирования будут содержаться линейные неравенства, то их можно заменить линейными уравнениями с помощью дополнительных неотрицательных неизвестных. Кроме того, если в конкретной задаче будет необходимо найти наименьшее возможное значение некоторой линейной функции  $u = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  при линейных ограничениях, то для приведения такой задачи к принятому нами виду основной задачи линейного программирования достаточно линейную функцию  $u$  заменить противоположной ей функцией  $v = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$ , так как если функция  $v$  принимает наибольшее значение при некоторых значениях переменных, то при тех же значениях переменных функция  $u$  примет наименьшее возможное значение.

Может случиться также, что в математической модели конкретной задачи некоторые переменные по своему содержательному смыслу могут принимать и отрицательные значения. Тогда для каждой такой переменной  $x_j$  вводят две новые неотрицательные переменные  $x'_j$  и  $x''_j$ , такие что  $x_j = x'_j - x''_j$ , и заменяют  $x_j$  этой разностью в системе ограничений и целевой функции, после чего задача приводится к стандартному виду.

Не всегда удобно пользоваться формулировкой задачи линейного программирования (3.1.1)—(3.1.3). В частности, вместо системы линейных уравнений (3.1.1) целесообразно иногда иметь систему линейных неравенств. Чтобы перейти от системы линейных уравнений к системе линейных неравенств, достаточно заметить, что уравнение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{cases}$$

С другой стороны, если в математической модели конкретной задачи условия, которыми связаны переменные целевой функции, представляют собой систему линейных алгебраических неравенств, то ее можно заменить некоторой системой линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных и привести задачу к принятому нами виду основной задачи линейного программирования.

Поэтому задачу линейного программирования нередко формулируют как задачу минимизации или максимизации линейной функции (3.1.3) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Такую запись называют **общей задачей линейного программирования**.

Обозначим  $\mathbf{A}$  матрицу системы линейных уравнений (3.1.1),  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  — векторы неизвестных и свободных членов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а также введем в рассмотрение  $n$ -мерный вектор

$$\mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n),$$

компонентами которого служат коэффициенты линейной функции (3.1.3), и  $n$ -мерный нуль-вектор  $\mathbf{0}(0, 0, \dots, 0)$ . Тогда можно линейную функцию (3.1.3) представить как произведение

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x}, \quad (3.1.4)$$

систему линейных уравнений (8.1.7) заменить одним матричным уравнением

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.1.5)$$

а условия (3.1.2) записать в виде

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (3.1.6)$$

Поэтому часто основную задачу линейного программирования кратко записывают как задачу минимизации линейной функции (3.1.4) при линейных ограничениях (3.1.5)—(3.1.6).

## **§ 3.2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Основную задачу линейного программирования мы сформулировали как задачу минимизации линейной функции, переменные которой связаны некоторой системой линейных уравнений и подчинены условию неотрицательности.

Вначале рассмотрим частный случай задачи линейного программирования, когда целевая функция *максимизируется*, система уравнений имеет *предпочитаемый* вид, притом правые части всех уравнений *неотрицательны*.

*Требуется максимизировать линейную функцию*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.2.1)$$

*при условиях*

$$\begin{cases} x_1 & + g_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{1n}x_n = h_1, \\ x_2 & + g_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{2n}x_n = h_2, \\ \ddots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ & x_m + g_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + g_{mn}x_n = h_m \end{cases} \quad (3.2.2)$$

*и*

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.3)$$

Для решения такой задачи применяется **симплексный метод линейного программирования**.

Одним из допустимых решений задачи линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3) будет базисное неотрицательное решение системы (3.2.2):

$$x_1 = h_1, x_2 = h_2, \dots, x_m = h_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0, \quad (3.2.4)$$

так как мы предположили, что  $h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$ .

Ему соответствует значение целевой функции, равное

$$z_0 = c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_mh_m + c_{m+1}0 + \dots + c_n0 = \sum_{i=1}^m c_ih_i. \quad (3.2.5)$$

Исследуем, является ли решение (3.2.4) оптимальным, т. е. является ли значение (3.2.5) наибольшим из всех возможных значений целевой функции (3.2.1), отвечающих различным неотрицательным решениям системы (3.2.2).

Учитывая, что система уравнений (3.2.2) имеет предпочитаемый вид, находим для нее общее решение:

$$x_i = h_i - g_{i,m+1}x_{m+1} - \dots - g_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.6)$$

Придавая свободным неизвестным различные неотрицательные значения, будем получать различные решения системы (3.2.2), среди которых нас интересуют только неотрицательные.

Подставляя компоненты этих неотрицательных решений в целевую функцию (3.2.1), будем получать соответствующие значения целевой функции. Очевидно, чтобы было легче следить за поведением целевой функции, целесообразно выразить ее только через свободные неизвестные. Для этого можно подставить в целевую функцию (3.2.1) на место базисных неизвестных их выражения (3.2.6) через свободные неизвестные, но лучше пойти другим путем, приводящим к тому же результату. Очевидно, если переписать выражение (3.2.1) в виде

$$-z + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_nx_n = 0, \quad (3.2.7)$$

то для того, чтобы исключить базисные неизвестные из (3.2.7), достаточно умножить первое уравнение системы (3.2.2) на  $c_1$ , второе на  $c_2$ , ...,  $m$ -е — на  $c_m$ , сложить полученные произведения и из результата вычесть уравнение (3.2.7). Получим:

$$z + \Delta_{m+1}x_{m+1} + \dots + \Delta_nx_n = z_0, \quad (3.2.8)$$

где

$$\Delta_j = c_1g_{1j} + c_2g_{2j} + \dots + c_mg_{mj} - c_j = \sum_{i=1}^m c_i g_{ij} - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.9)$$

а  $z_0$  определяется равенством (3.2.5).

Заметим, что целесообразно ввести в рассмотрение вектор

$$\tilde{\mathbf{c}}(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m),$$

координатами которого являются коэффициенты при тех неизвестных в целевой функции (3.2.1), которые являются базисными в системе уравнений (3.2.2), притом записанными в том порядке, в котором расположены соответствующие базисные неизвестные в системе уравнений. Тогда

$$\Delta_j = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{g}_j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad z_0 = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{h},$$

где

$$\mathbf{g}_j \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{mj} \end{pmatrix} —$$

вектор коэффициентов при неизвестной  $x_j$  в системе уравнений (3.2.2),

$$\mathbf{h} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} —$$

вектор свободных членов системы (3.2.2).

Для проведения указанных вычислений обычно составляют таблицу, выписав матрицу системы уравнений (3.2.2) и приписав к ней сверху строку  $\mathbf{c}$  всех коэффициентов линейной функции (3.2.1), слева против каждой строки — соответствующую базисную неизвестную и коэффициент при ней из целевой функции, т. е. вектор  $\tilde{\mathbf{c}}$ , а снизу — коэффициенты при неизвестных и свободный член уравнения (3.2.8). Такую таблицу называют *первой симплексной таблицей* (табл. 3.2.1).

**Таблица 3.2.1**

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	$c_1$	$c_2$	...	$c_m$	$c_{m+1}$	...	$c_j$	...	$c_n$
			$x_1$	$x_2$	...	$x_m$	$x_{m+1}$	...	$x_j$	...	$x_n$
$c_1$	$x_1$	$h_1$	1	0	...	0	$g_{1,m+1}$	...	$g_{1j}$	...	$g_{1n}$
$c_2$	$x_2$	$h_2$	0	1	...	0	$g_{2,m+1}$	...	$g_{2j}$	...	$g_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$c_m$	$x_m$	$h_m$	0	0	...	1	$g_{m,m+1}$	...	$g_{mj}$	...	$g_{mn}$
		$z_0 - z$	0	0	...	0	$\Delta_{m+1}$	...	$\Delta_j$	...	$\Delta_n$

Полезно составить вспомогательную систему линейных уравнений, приписав к системе (3.2.2) уравнение (3.2.8):

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^n g_{ij} x_j = h_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ z + \sum_{j=m+1}^n \Delta_j x_j = z_0. \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Тогда первую симплексную таблицу можно рассматривать как расширенную матрицу системы линейных уравнений (3.2.10) с указанными выше дополнениями.

Теперь, наряду с общим решением (3.2.6) системы ограничений, из уравнения (3.2.8), совпадающего с последним уравнением вспомогательной системы (3.2.10), получаем выражение целевой функции  $z$  только через свободные неизвестные:

$$z = z_0 - \Delta_{m+1} x_{m+1} - \dots - \Delta_n x_n. \quad (3.2.11)$$

С помощью этого выражения мы исследуем базисное допустимое решение (3.2.4) на оптимальность и выясним, как следует поступить, если оно окажется не оптимальным.

**КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** *Базисное решение (3.2.4) является оптимальным решением задачи линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3) тогда и только тогда, когда все*

$$\Delta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.12)$$

**Доказательство.** Действительно, если в общем решении (3.2.6) мы станем придавать различные неотрицательные значения свободным неизвестным так, чтобы соответствующие базисные неизвестные также принимали неотрицательные значения, то одновременно с неотрицательными частными решениями системы ограничений мы будем получать согласно выражению (3.2.11) соответствующие им значения целевой функции. В частности, при нулевых значениях свободных неизвестных получится базисное решение (3.2.4) и соответствующее ему значение целевой функции (3.2.5). Если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в последнем уравнении вспомогательной системы (3.2.10), например,  $\Delta_{m+1}$ , отрицателен, то мы можем соответствующей свободной неизвестной  $x_{m+1}$  дать в общем решении какое-нибудь положительное значение, сохранив  $x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ , и получить неотрицательное частное решение с большим значением целевой функции.  $\square$

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЗИСНОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** *При выполнении условий оптимальности (3.2.12) базисное решение (3.2.4) является единственным оптимальным решением задачи линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3) тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \dots, \Delta_n$  при свободных неизвестных в последнем уравнении вспомогательной системы (3.2.10) строго положительны.*

**Доказательство.** Пусть, например,  $\Delta_{m+1} = 0$ . Тогда как бы мы не изменяли в общем решении (3.2.6) свободную неизвестную  $x_{m+1}$  в ее неотрицательной области изменения при  $x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ , целевая функция (3.2.11) будет сохранять одно и то же значение (3.2.5). Таким образом, оптимальное решение задачи (3.2.1)—(3.2.3) оказывается не единственным  $\square$

Предположим, что базисное решение (3.2.4) не является оптимальным, т. е. среди коэффициентов  $\Delta_j$  есть по меньшей мере один отрицательный. Проще всего проследить за поведением целевой функции тогда, когда изменяется только одна свободная неизвестная, а остальные свободные неизвестные сохраняют нулевые значения, которые они имели в базисном решении (3.2.4). Вспомним, что каждая свободная неизвестная при нулевых значениях других свободных неизвестных имеет свою неотрицательную область изменения, нижняя граница которой всегда равна нулю, а верхняя граница является конечной или бесконечной в зависимости от то-

го, есть или нет при данной неизвестной в соответствующей предпочитаемой форме системы уравнений хотя бы один положительный коэффициент. При исследовании задачи линейного программирования последнее обстоятельство имеет существенное значение.

**КРИТЕРИЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** *Если есть хотя бы одна свободная неизвестная, такая что коэффициент  $\Delta_j$  при ней в последнем уравнении системы (3.2.10) отрицателен, а в первых  $m$  уравнениях той же системы (3.2.10) среди коэффициентов  $g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{mj}$  при ней нет ни одного положительного, то задача линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3) неразрешима в силу неограниченности целевой функции (3.2.1) на множестве неотрицательных решений системы ограничений (3.2.2).*

**Доказательство.** Пусть, например,  $\Delta_n < 0, g_{1n} \leq 0, g_{2n} \leq 0, \dots, g_{mn} \leq 0$ . Тогда в общем решении (3.2.6) системы ограничений мы можем переменную  $x_n$  неограниченно увеличивать, положив  $x_{m+1} = \dots = x_{n-1} = 0$ , и тогда, как видно из выражения (3.2.11), целевая функция будет неограниченно возрастать. Следовательно, оптимального решения не существует.  $\square$

Предположим теперь, что базисное решение (3.2.4) не оптимально, и что для любой свободной неизвестной  $x_j$  с положительным коэффициентом  $\Delta_j$  можно указать ограниченную неотрицательную область ее изменения при нулевых значениях других свободных неизвестных. Как в этом случае искать оптимальное решение? Прежде всего, заметим, что скорость изменения целевой функции  $z$  относительно независимой переменной  $x_j$  при нулевых значениях других свободных неизвестных, как видно из (3.2.11), определяется частной производной  $\partial z / \partial x_j = -\Delta_j$ . Следовательно, наиболее быстро целевая функция будет возрастать при возрастании той свободной переменной, при которой в последнем уравнении вспомогательной системы (3.2.10) стоит наибольший по модулю отрицательный коэффициент  $\Delta_j$ . Пусть таким коэффициентом является  $\Delta_s$ , т. е.

$$\min_{j=1, 2, \dots, n} (\Delta_j > 0) = \Delta_s. \quad (3.2.13)$$

Так как неизвестная  $x_s$  при нулевых значениях других свободных неизвестных не может возрастать неограниченно, а целевую функцию мы хотим максимизировать, то придадим неизвестной  $x_s$  наибольшее возможное значение, которое она может принять, тем самым выделив из общего решения (3.2.6) крайнее неотрицательное решение системы ограничений (3.2.2). Мы знаем, что это крайнее решение совпадает с новым базисным неотрицательным решением, соответствующим новому предпочитаемому виду системы (3.2.2), для получения которого достаточно принять неизвестную  $x_s$  за разрешающую и подвергнуть систему (3.2.2) симплексному преобразованию. Если

$$\min_{i=1,2,\dots,m} \left( \frac{h_i}{g_{is} > 0} \right) = \frac{h_r}{g_{rs}}, \quad (3.2.14)$$

то за разрешающее уравнение при этом преобразовании мы должны будем взять  $r$ -е. Как только мы получим новое базисное неотрицательное решение системы ограничений, т. е. новое допустимое решение задачи линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3), придется это решение сразу исследовать на оптимальность. Для этого мы должны будем выразить целевую функцию через новые свободные неизвестные, т. е. из уравнения (3.2.8) исключить неизвестную  $x_s$ , переходящую в число базисных. Поэтому мы преобразуем всю вспомогательную систему уравнений (3.2.10), исключая неизвестную  $x_s$  из всех уравнений, кроме  $r$ -го. Система (3.2.10) преобразуется при этом к следующему виду:

$$\begin{cases} x_i + g'_{ir}x_r + \sum_{j=m+1}^{n(j \neq s)} g'_{ij}x_j = h'_i, & i \neq r, \\ x_s + g'_{sr}x_r + \sum_{j=m+1}^{n(j \neq s)} g'_{sj}x_j = h'_s, \\ z + \Delta'_r x_r + \sum_{j=m+1}^{n(j \neq s)} \Delta'_j x_j = z'_0. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы уравнений (3.2.15) связаны с коэффициентами и свободными членами системы (3.2.10) формулами исключения:

$$\begin{cases} g'_{ij} = g_{ij} - g_{is} \frac{g_{rj}}{g_{rs}}, & i \neq r, \\ g'_{rj} = \frac{g_{rj}}{g_{rs}}, \end{cases} \quad \begin{cases} h'_i = h_i - g_{is} \frac{h_r}{g_{rs}}, & i \neq r, \\ h'_r = \frac{h_r}{g_{rs}}. \end{cases}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_s \frac{g_{rj}}{g_{rs}}, \quad z'_0 = z_0 - \Delta_s \frac{h_r}{g_{rs}}. \quad (3.2.16)$$

Определяемое первыми  $m$  уравнениями системы (3.2.15) базисное неотрицательное решение

$$\begin{aligned} x_1 = h'_1, x_2 = h'_2, \dots, x_{r-1} = h'_{r-1}, x_r = 0, x_{r+1} = h'_{r+1}, \dots, x_m = h'_m, \\ x_{m+1} = 0, \dots, x_{s-1} = 0, x_s = h'_s, x_{s+1} = 0, \dots, x_n = 0 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

является одним из допустимых решений задачи линейного программирования (3.2.1)—(3.2.3). Отвечающее ему значение целевой функции равно

правой части  $z'_0$  последнего уравнения системы (3.2.15). Из последнего уравнения системы (3.2.14) получаем выражение целевой функции через новые свободные неизвестные:

$$z = z'_0 - \Delta'_r x_r - \Delta'_{m+1} x_{m+1} - \dots - \Delta'_{s-1} x_{s-1} - \Delta'_{s+1} x_{s+1} - \dots - \Delta'_n x_n,$$

с помощью которого можно исследовать решение (3.2.17) на оптимальность с помощью сформулированных критериев.

Можно сказать, что решение задачи линейного программирования сводится к составлению вспомогательной системы уравнений (3.2.10) и ее преобразованию к виду (3.2.15) и далее. Расширенную матрицу системы (3.2.15) с указанными выше дополнениями естественно назвать *второй симплексной таблицей*, аналогично определится *третья симплексная таблица* и т. д. Решение конкретной задачи линейного программирования сводится к составлению первой симплексной таблицы и ее преобразованиям по рекуррентным формулам (3.2.16), т. е. по обычным формулам исключения, с той лишь особенностью, что теперь по определенным правилам выбирается разрешающий элемент. Записывается процесс решения в виде последовательности симплексных таблиц.

Заметим, что есть возможность контроля вычислений. После того как получена очередная симплексная таблица из предыдущей по правилам исключения, можно еще раз вычислить элементы последней строки по тем правилам, по которым вычислялись элементы последней строки первой симплексной таблицы.

Подчеркнем, что за каждой симплексной таблицей необходимо видеть некоторую систему линейных уравнений, из которых первые  $m$  определяют один из предпочитаемых видов системы ограничений, а из  $(m+1)$ -го уравнения легко получается выражение целевой функции через свободные неизвестные.

Таким образом, процесс перехода к новым и новым решениям продолжается до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение или не будет доказана неограниченность линейной функции (3.2.1) на множестве решений системы ограничений (3.2.2), (3.2.3). Но это утверждение справедливо только при условии невырожденности рассматриваемой задачи (3.2.1)—(3.2.3), т. е. если ни на одном этапе процесса решения ни один из свободных членов системы уравнений (3.2.2) не обращается в нуль.

При  $h_r \neq 0$ , как следует из (3.2.16), новое значение целевой функции строго меньше предыдущего и через конечное число шагов мы придем к оптимальному решению или докажем неразрешимость задачи, так как число шагов не может быть больше числа базисных решений  $C_n^m$ , среди которых неотрицательных значительно меньше.

В вырожденном случае на одном или нескольких этапах свободный член разрешающего уравнения может оказаться равным нулю,

и значение целевой функции при, переходе к следующему базисному допустимому решению не изменится. Появляется возможность выбрать последовательность базисных решений, приводящую к закливанию, т. е. неоднократному возвращению к одному и тому же решению, и приведенные выше рассуждения теряют силу. Известны различные способы устранения возможности закливания при решении задачи линейного программирования, суть которых состоит в преодолении появляющейся неоднозначности в выборе разрешающего уравнения в вырожденной системе и, следовательно, неизвестной, исключаемой из числа базисных, но мы их не будем рассматривать, так как до сего времени ни одна из практических задач не привела к закливанию; при машинных вычислениях обычно в случае неоднозначности в качестве разрешающего берут уравнение с наименьшим номером из числа тех, которые можно принять в качестве разрешающего, хотя можно взять любое из них.

**ПРИМЕР 3.2.1.** Требуется найти максимум линейной функции

$$z = -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 17x_4 - x_5 \rightarrow \max \quad (3.2.18)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 5, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \quad (3.2.19)$$

и

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \quad (3.2.20)$$

**Решение.** Одним из допустимых решений задачи линейного программирования (3.2.18)—(3.2.20) будет неотрицательное базисное решение системы (3.2.19)

$$x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0.$$

Ему соответствует значение целевой функции, равное

$$z_0 = -3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 17 \cdot 0 - 0 = -11.$$

Система уравнений (3.2.19) имеет предпочитаемый вид, из которого легко найти общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_3 + 2x_4 - 4x_5, \\ x_2 = 1 + x_3 - 3x_4 - x_5. \end{cases}$$

Очевидно, если переписать целевую функцию в виде

$$-z - 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 17x_4 - x_5 = 0, \quad (3.2.21)$$

то чтобы исключить из выражения для целевой функции базисные неизвестные, достаточно умножить первое уравнение системы (3.2.19) на  $-3$ , а второе — на  $4$ , сложить полученные произведения и из результата вычесть последнее выражение для целевой функции (3.2.21):

$$z - 2x_3 + x_4 - 7x_5 = -11.$$

Первая симплексная таблица представлена в табл. 3.2.2. Элементы последней строки табл. 3.2.2 вычислены по формулам (3.2.5) и (3.2.9), имея в виду при этом, что  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  равны нулю как соответствующие базисным неизвестным,

$$\begin{aligned} z_0 &= (-3, 4)(5, 1) &= -3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = -11; \\ \Delta_3 &= (-3, 4)(1, -1) - 5 &= -3 \cdot 1 + 4(-1) - 5 = -2; \\ \Delta_4 &= (-3, 4)(-2, 3) - (-17) &= -3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 17 = 1; \\ \Delta_5 &= (-3, 4)(4, 1) - 1 &= -3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 1 = -7. \end{aligned}$$

Таблица 3.2.2

$\bar{c}$	Базис	$h$	$-3$	$4$	$-5$	$17$	$-1$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$-3$	$x_1$	$5$	$1$	$0$	$1$	$-2$	$4$
$4$	$x_2$	$1$	$0$	$1$	$-1$	$3$	$1$
	$z_0 - z$	$-11 - z$	$0$	$0$	$-2$	$1$	$-7$

Первую симплексную таблицу можно рассматривать как расширенную матрицу системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 5, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ z + 2x_3 - x_4 + 7x_5 = -11. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

При этом

$$z = -11 + 2x_3 - x_4 + 7x_5.$$

Полученное базисное решение не является оптимальным, так как целевая функция убывает как при возрастании свободной неизвестной  $x_3$  при сохранении  $x_4 = x_5 = 0$ , так и при возрастании  $x_5$ , если сохранить значения остальных свободных неизвестных  $x_3, x_4$  равными нулю.

В последней строке симплексной таблицы есть отрицательные коэффициенты  $\Delta_3 = -2$  и  $\Delta_5 = -7$  при свободных неизвестных  $x_3$  и  $x_5$ , и при

любой из этих неизвестных в системе уравнений есть хотя бы один положительный коэффициент. Принимая  $x_5$  за разрешающую неизвестную, подвергаем систему уравнений (3.2.19) симплексному преобразованию. Составляя отношения свободных членов уравнений системы (3.2.19) к соответствующим положительным коэффициентам при неизвестной  $x_5$  и находя  $\min\{5/4; 1/1\} = 1/1$ , определяем, что в качестве разрешающего должно быть взято второе уравнение системы (3.2.19). Исключаем неизвестную  $x_5$  из всех уравнений вспомогательной системы (3.2.22), кроме второго уравнения, по обычным правилам метода Жордана — Гаусса. Неизвестная  $x_5$  становится базисной,  $x_2$  — свободной. Система (3.2.22) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 14x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ z - 7x_2 + 9x_3 - 22x_4 = -4. \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Определяемое первыми двумя уравнениями этой системы неотрицательное базисное решение

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1,$$

является одним из допустимых решений задачи линейного программирования (3.2.18)—(3.2.20), которому отвечает значение целевой функции

$$z = -4 - 7x_2 + 9x_3 - 22x_4.$$

Это решение также не является оптимальным, и целевая функция будет возрастать при возрастании  $x_3$ , если положить  $x_2 = x_4 = 0$ . Принимаем неизвестную  $x_3$  за разрешающую и подвергаем первые два уравнения системы (3.2.23) симплексному преобразованию. Так как разрешающим уравнением будет первое, то исключим неизвестную  $x_3$  из всех уравнений системы (3.2.23), кроме первого уравнения, и получим новую вспомогательную систему линейных уравнений, определяющую третье базисное неотрицательное решение системы ограничений и соответствующее ему значение целевой функции.

Полностью процесс решения иллюстрируется табл. 3.2.3.

В четвертой симплексной таблице среди  $\Delta_j$  нет ни одного отрицательного. Поэтому четвертое базисное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 17, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 0$$

является оптимальным, а наибольшее значение целевой функции равно 17.  $\square$



ственной неотрицательной неизвестной и образуем следующую систему  $m$  линейных уравнений с  $n + m$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_{n+2} & = b_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_{n+m} & = b_m, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

где

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3.5)$$

Очевидно, в системе (3.3.4) неизвестные  $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$  образуют базисный набор, который принято называть *искусственным базисом*.

Кроме того, образуем линейную функцию

$$t = -s_{n+1} - s_{n+2} - \dots - s_{n+m} \quad (3.3.6)$$

и сформулируем следующую вспомогательную задачу линейного программирования: максимизировать линейную функцию (3.3.6) при линейных ограничениях (3.3.4) и (3.3.5).

Для решения вспомогательной задачи (3.3.4)—(3.3.6) мы можем применить симплексный метод, так как система (3.3.4) имеет предпочитаемый вид, искусственные неизвестные  $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$  являются базисными, а правые части всех уравнений неотрицательны по предположению относительно системы (3.3.2). В процессе решения задачи (3.3.4)—(3.3.6) система уравнений (3.3.4) будет подвергаться симплексным преобразованиям, в результате которых искусственные базисные неизвестные будут переходить в число свободных, а в базисный набор будут постепенно включаться исходные неизвестные. На некотором этапе процесса решения вспомогательной задачи (3.3.4)—(3.3.6) система уравнений (3.3.4) примет такой предпочитаемый вид, что соответствующее базисное решение будет оптимальным решением этой задачи. При этом максимальное значение целевой функции может быть или отрицательным, или равным нулю, так как функция  $t$  представляет собой линейную комбинацию неотрицательных переменных с отрицательными коэффициентами.

**КРИТЕРИЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.** Если максимальное значение функции  $t$  окажется строго меньше нуля, то исходная задача (3.3.1)—(3.3.3) не имеет решения ввиду противоречивости условий (3.3.2)—(3.3.3).

**Доказательство.** Действительно, если допустить, что система уравнений (3.3.2) имеет неотрицательное решение  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , то вспомогательная задача будет иметь решение  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots, 0)$ , для которого  $t = 0$ , что противоречит предположению.  $\square$

Если же  $t_{\max} = 0$ , то оптимальное решение задачи (3.3.4)—(3.3.6) должно иметь вид  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots, 0)$ , так как из условия  $t = 0$  следует  $s_{n+1} = s_{n+2} = \dots = s_{n+m} = 0$ . Первые  $n$  компонент этого решения образуют некоторое неотрицательное решение  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  системы ограничений (3.3.2) исходной задачи (3.3.1)—(3.3.3), притом оно является базисным по построению, т. е. среди компонент  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  не более  $m$  отличных от нуля. В этом случае в полученной предпочитаемой форме системы (3.3.4) мы отбрасываем все искусственные неизвестные и, рассматривая результат как предпочитаемый эквивалент исходной системы уравнений (3.3.2), приступаем к решению исходной задачи (3.3.1)—(3.3.3).

Последние рассуждения справедливы в предположении, что рассматривается невырожденная задача. Если же задача является вырожденной, то может случиться, что  $t_{\max} = 0$ , но не все искусственные неизвестные выведены из базиса. Тогда следует учесть, что правая часть уравнения, содержащего искусственную базисную неизвестную, должна быть равна нулю, и потому мы можем либо отбросить это уравнение, если оно содержит только искусственные неизвестные  $s_{n+1}, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}$ , либо, если оно содержит хотя бы одну из исходных неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принять это уравнение за разрешающее и исключить какую-нибудь из этих неизвестных из всех других уравнений, чтобы вытеснить искусственную базисную неизвестную в число свободных, помня, что в случае необходимости можно рассматриваемое уравнение умножить на  $-1$ .

На практике вместо последовательной минимизации двух функций  $t$  и  $z$  часто рассматривают одну целевую функцию

$$w = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - M(s_{n+1} + s_{n+1} + \dots + s_{n+m}), \quad (3.3.7)$$

где число  $M$  предполагается положительным и большим любого числа, с которым его придется сравнивать, и решают задачу максимизации целевой функции (3.3.7) при условиях (3.3.4) и (3.3.5).

**ПРИМЕР 3.3.1 (ЗАДАЧА О ДИЕТЕ).** Симпатичная девушка узнала из дамского журнала, что для того чтобы волосы стали более шелковистыми, организм должен получать ежедневно не менее 40 г питательного вещества А, не менее 4 г питательного вещества Б и не менее 30 г питательного вещества В. Девушка знает, что в 1 кг яблок содержится 10 г вещества Б и 50 г вещества В, а в 100 г огурцов содержится 40 г вещества А и по 20 г веществ Б и В. Цена яблок — 60 руб. за 1 кг, цена огурцов — 50 руб. за 1 кг. Требуется помочь девушке составить рацион, помогающий увеличить шелковистость волос и при этом имеющий наименьшую стоимость.

**Решение.** Обозначим  $x_1$  и  $x_2$  массу приобретаемых девушкой яблок и огурцов, тогда общее количество получаемого в рационе питательного вещества А будет равно  $40x_2$  г, количество вещества Б в рационе составит

$10x_1 + 20x_2$  г, а количество вещества В —  $50x_1 + 20x_2$  г. Общая стоимость приобретаемых продуктов составит при этом  $z = 60x_1 + 50x_2$ . Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$z = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 40x_2 \geq 40, \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 4, \\ 50x_1 + 20x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для превращения системы ограничений в систему уравнений необходимо ввести балансовые неизвестные  $x_3, x_4, x_5$ :

$$z = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 40x_2 - x_3 = 40, \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 = 4, \\ 50x_1 + 20x_2 - x_5 = 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Вновь введенные переменные  $x_3, x_4, x_5$  нельзя считать базисными, поскольку они соответствуют базисному решению с отрицательными компонентами.

Поэтому введем искусственные базисные неизвестные  $s_1, s_2, s_3$  и рассмотрим задачу

$$z = -60x_1 - 50x_2 - Ms_1 - Ms_2 - Ms_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 40x_2 - x_3 + s_1 = 40, \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 + s_2 = 4, \\ 50x_1 + 20x_2 - x_5 + s_3 = 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad s_3 \geq 0. \end{cases}$$

Процесс решения иллюстрируется табл. 3.3.1. В пятой симплексной таблице среди  $\Delta_j$  нет ни одного отрицательного (поскольку  $M$  больше любого положительного числа). Поэтому пятое базисное решение

$$x_1 = 1/5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 18, \quad x_5 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0$$

является оптимальным.

Таким образом, оптимальный рацион состоит из 200 г яблок и 1 кг огурцов.  $\square$

Таблица 3.3.1

$\tilde{c}$	Базис	h	-60	-50	0	0	0	-M	-M	-M
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
-M	$s_1$	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-M	$s_2$	4	10	20	0	-1	0	0	1	0
-M	$s_3$	30	50	20	0	0	-1	0	0	1
	$z_0 - z$	$-74M - z$	$-60M + 60$	$-80M + 50$	M	M	M	0	0	0
-M	$s_1$	32	-20	0	-1	2	0	1	-2	0
-50	$x_2$	1/5	1/2	1	0	-1/20	0	0	1/20	0
-M	$s_3$	26	40	0	0	1	-1	0	-1	1
	$z_0 - z$	$-58M - 10 - z$	$-20M + 35$	0	M	$-3M + 5/2$	M	0	$4M - 5/2$	0
-M	$s_1$	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-60	$x_1$	2/5	1	2	0	-1/10	0	0	1/10	0
-M	$s_3$	10	0	-80	0	5	-1	0	-5	1
	$z_0 - z$	$-50M + 24 - z$	0	$40M - 70$	M	$-5M + 6$	M	0	$6M - 6$	0
-M	$s_1$	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-60	$x_1$	0,6	1	2/5	0	0	-1/50	0	0	1/50
0	$x_4$	2	0	-16	0	1	-1/5	0	-1	1/5
	$z_0 - z$	$-40M - 36 - z$	0	$-40M + 26$	M	0	6/5	0	M	$M - 6/5$
-50	$x_2$	1	0	1	-1/40	0	0	1/40	0	0
-60	$x_1$	1/5	1	0	1/100	0	-1/50	-1/100	0	1/50
0	$x_4$	18	0	0	-2/5	1	-1/5	2/5	-1	1/5
	$z_0 - z$	$-62 - z$	0	0	13/20	0	6/5	$M - 13/20$	M	$M - 6/5$

### § 3.4. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Задача оптимального планирования производства состоит в отыскании такого плана выпуска продукции

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

который позволяет получить максимальную выручку

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.4.1)$$

при ограничениях по имеющимся у предприятия ресурсам

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4.2)$$

причем

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4.3)$$

Здесь  $c_j$  — это цены продуктов,  $b_i$  — запасы ресурсов, а каждый из элементов  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  равен расходу  $i$ -го ресурса на производство единицы  $j$ -го продукта.

По оптимальному плану производства некоторые ресурсы используются полностью (назовем их *дефицитными*), а другие ресурсы избыточны. Более того, различные виды ресурсов в процессе производства оказываются неравноценными в том смысле, что незначительное увеличение объема одного дефицитного ресурса может сильно повлиять на получаемую прибыль, а увеличение объема другого дефицитного ресурса на то же количество повлияет значительно меньше.

В рамках модели линейного программирования предприятия должна существовать внутренняя система оценки ресурсов, используемых им в процессе производства. Эти оценки связаны с технологическими особенностями данного производственного процесса, характеризующимися матрицей  $\mathbf{A}$ , со структурой и количеством ресурсов, отпущенных для производственного потребления, описываемых вектором  $\mathbf{b}$ , а также со структурой внешних цен, на основе которых получается вектор цен  $\mathbf{c}$ . Условимся называть эти оценки *расчетными оценками ресурсов*. Подчеркнем, что расчетную оценку единицы ресурса не следует отождествлять с той ценой, по которой предприятию был отпущен этот ресурс и которая определяется рынком. В отличие от рыночной цены, расчетная оценка показывает только сравнительную ценность данного ресурса на данном предприятии в данных конкретных условиях.

Как же установить эти расчетные оценки?

Обозначим через  $y_i$  оценку единицы  $i$ -го вида ресурса,

$$\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m) —$$

вектор оценок ресурсов.

На производство единицы продукции  $j$ -го вида мы должны затратить различные виды ресурсов в количествах  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ , и их суммарная оценка будет равна  $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m$ . Очевидно, что суммарная расчетная оценка тех ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукции  $j$ -го вида, должна быть не меньше отпускной цены данной продукции:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом, чтобы расчетные оценки были объективными, целесообразно минимизировать суммарную оценку всех ресурсов  $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ . Кроме того, естественно считать расчетные оценки неотрицательными.

Таким образом, мы пришли к новой задаче линейного программирования: *найти вектор оценок ресурсов  $y(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)$ , минимизирующий суммарную оценку всех ресурсов*

$$f = \sum_{j=1}^n b_j y_j \rightarrow \min \quad (3.4.4)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.5)$$

где

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4.6)$$

Полученную задачу линейного программирования (3.4.4)—(3.4.6) назовем *двойственной задачей* к задаче (3.4.1)—(3.4.3). Расчетные оценки ресурсов, соответствующие оптимальному плану производства, служат компонентами оптимального решения двойственной задачи. Поэтому часто компоненту  $y_i$  оптимального решения двойственной задачи называют *двойственной оценкой  $i$ -го ресурса*.

Пусть дана задача линейного программирования с максимизируемой целевой функцией и ограничениями — неравенствами вида « $\leq$ » (с правыми частями произвольного знака, не обязательно неотрицательными). *Двойственной задачей* для такой задачи линейного программирования называется задача линейного программирования, которая получается из исходной задачи следующим образом:

- каждому ограничению-неравенству исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи, принимающая неотрицательные значения;
- матрица коэффициентов при неизвестных транспонируется;
- правые части ограничений переходят в коэффициенты целевой функции;
- коэффициенты целевой функции переходят в правые части ограничений;
- знаки неравенств меняются на противоположные (т. е. на « $\geq$ »);
- от максимизации целевой функции переходят к минимизации.

Говорят, что задачи линейного программирования (3.4.1)—(3.4.3) и (3.4.4)—(3.4.6) образуют *симметричную пару*.

Если система ограничений исходной задачи содержит неравенство вида « $\geq$ », его перед построением двойственной задачи следует умножить на  $-1$ , точно так же следует поступить с целевой функцией исходной задачи, если она минимизируется.

Если же система ограничений исходной задачи содержит как неравенства, так и уравнения, то в двойственной задаче переменные, отвечающие ограничениям — равенствам, могут принимать значения любого знака, тогда как ограничениям — неравенствам будут соответствовать неотрицательные переменные (это следует из того факта, что уравнение эквивалентно двум неравенствам с противоположными знаками). Таким образом, пара двойственных задач может быть записана в виде

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = k+1, k+2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \\ x_j &\text{ любого знака, } \quad j = l+1, l+2, \dots, n; \\ f &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &= c_j, \quad j = l+1, l+2, \dots, n, \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ y_i &\text{ любого знака, } \quad i = k+1, k+2, \dots, m. \end{aligned}$$

Такая пара двойственных задач называется несимметричной, в отличие от симметричной пары (3.4.1)—(3.4.3) и (3.4.4)—(3.4.6).

**ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ.** Для любых допустимых решений  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  прямой и двойственной задач линейного программирования справедливо неравенство

$$\mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = \mathbf{y}\mathbf{b}.$$

Основное неравенство справедливо как для симметричной, так и для несимметричной пары двойственных задач.

**Доказательство.** В случае симметричной пары двойственных задач, учитывая соотношения (3.4.5) и (3.4.2), получаем, что

$$\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = \mathbf{yb}.$$

Доказательство основного неравенства теории двойственности для случая несимметричной пары двойственных задач оставляем читателю в качестве упражнения.  $\square$

**МАЛАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ.** Для существования оптимального решения любой из задач двойственной пары необходимо и достаточно существование допустимого решения для каждой из них.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{y}$  — произвольное допустимое решение двойственной задачи. Тогда любое допустимое решение  $\mathbf{x}$  исходной задачи удовлетворяет неравенству (3.4.1), откуда следует, что линейная функция

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ограничена сверху на непустом множестве допустимых решений исходной задачи. Решая исходную задачу линейного программирования симплексным методом, мы получим последовательность допустимых базисных решений, на которых функция цели возрастает.

При этом возможны только два случая: или данная задача линейного программирования имеет оптимальное решение, и мы придем к нему, перебирая базисные допустимые решения, или задача не имеет решения в силу неограниченности функции цели на множестве допустимых решений, и это также обнаруживается на некотором шаге симплексного алгоритма.

В нашем случае вторая возможность отпадает, так как максимизируемая целевая функция ограничена сверху. Следовательно, симплексным методом мы обязательно найдем оптимальное решение исходной задачи.

Аналогичными рассуждениями доказывается разрешимость двойственной задачи. Малая теорема полностью доказана.  $\square$

**ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРЫ ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ.** Если для некоторых допустимых решений  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{y}^*$  пары двойственных задач выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*,$$

то векторы  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{y}^*$  являются оптимальными решениями соответствующих задач линейного программирования.

**Доказательство.** Действительно, согласно малой теореме двойственности, любое решение исходной задачи удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^*,$$

откуда, учитывая соотношение (3.4.1), получаем

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^*,$$

и так как это неравенство справедливо для любого решения  $x$  исходной задачи, то решение  $x^*$  является оптимальным для исходной задачи.

Аналогично доказывается оптимальность решения  $y^*$  двойственной задачи. Следовательно, условие (3.4.1) является достаточным для того, чтобы  $x^*$  и  $y^*$  являлись оптимальными решениями соответствующих задач двойственной пары.

Таким образом, план производства продукции и вектор оценок ресурсов является оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.  $\square$

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ.** *Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают; если же целевая функция одной из задач не ограничена, то система условий другой задачи противоречива.*

Заметим сразу же, что если в одной из задач система ограничений противоречива, то в двойственной задаче она также может оказаться противоречивой, т. е. последнее утверждение первой теоремы двойственности не допускает обращения; таковы, например, задачи

$$\begin{array}{ll} 5x_1 - x_2 \rightarrow \max, & 2y_1 - 4y_2 \rightarrow \min, \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ -3x_1 + 3x_2 \leq -4, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 3y_1 - 3y_2 \geq 5, \\ -3y_1 + 3y_2 \geq -1, \end{array} \right. \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0; & y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0. \end{array}$$

Связь между задачами двойственной пары глубже, чем указано в формулировке теоремы. Оказывается, что симплексный метод, примененный к одной из задач, автоматически приводит к решению другой задачи.

**Доказательство.** Запишем в табл. 3.4.1 первую и последнюю симплексные таблицы для исходной задачи из симметричной пары. В первой симплексной таблице базисными неизвестными являются  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ , им соответствуют нулевые коэффициенты целевой функции и нулевые симплексные оценки, а в столбцах первой симплексной таблицы под этими неизвестными записана единичная матрица. Неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в первой симплексной таблице являются свободными, им соответствуют коэффициенты целевой функции  $c_1, c_2, \dots, c_n$  и симплексные оценки  $-c_1, -c_2, \dots, -c_n$ , а в столбцах первой симплексной таблицы под этими неизвестными записана матрица  $A$ .

Таблица 3.4.1

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	0	0	...	0
			$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+2}$	...	$x_{n+m}$
0	$x_{n+1}$	$b_1$	$\mathbf{A}$				1	0	...	0
0	$x_{n+2}$	$b_2$					0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
0	$x_{n+m}$	$b_m$					0	0	...	1
		$z_0 - z$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c_{i_1}$	$x_{i_1}^*$	$h_1^*$	$\mathbf{A}^{(1)}$				$\mathbf{Q}^{-1}$			
$c_{i_2}$	$x_{i_2}^*$	$h_2^*$								
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$								
$c_{i_m}$	$x_{i_m}^*$	$h_m^*$								
		$z^* - z$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_{m+1}$	$\Delta_n$	$\Delta_{n+1}$	$\Delta_{n+2}$	$\Delta_j$	$\Delta_{n+m}$

В последней симплексной таблице на месте единичной матрицы будет обращенный базис  $\mathbf{Q}^{-1}$ , при этом базисным будет некоторый набор неизвестных  $x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, \dots, x_{i_m}^*$ , им будет соответствовать вектор коэффициентов целевой функции  $\tilde{\mathbf{c}} = (c_{i_1} \ c_{i_2} \ \dots \ c_{i_m})$ , оптимальное базисное решение будет определяться вектором

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix},$$

а максимальное значение целевой функции исходной задачи будет равно

$$z^* = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{h}.$$

При этом матрица  $\mathbf{A}^{(1)}$ , стоящая под неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в последней симплексной таблице, определяется как

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A},$$

а вектор оптимального базисного решения

$$\mathbf{h} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}.$$

Обозначим симплексные оценки в последней таблице

$$\mathbf{d}_1 = (\Delta_1 \ \Delta_2 \ \cdots \ \Delta_n), \quad \mathbf{d}_2 = (\Delta_{n+1} \ \Delta_{n+2} \ \cdots \ \Delta_{n+m}).$$

В последней таблице содержится оптимальное решение, поэтому

$$\mathbf{d}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}_2 \geq \mathbf{0}.$$

Но по определению оценок (3.2.9)

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{a}_j^{(1)} - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \Delta_j &= \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{q}_j^{-1}, \quad j = n+1, n+2, \dots, n+m, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{a}_j^{(1)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{q}_j^{-1}$  —  $j$ -й столбец обращенного базиса  $\mathbf{Q}^{-1}$ . Поэтому

$$\mathbf{d}_1 = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{d}_2 = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1},$$

и условия оптимальности решения, содержащегося в последней симплексной таблице, можно переписать в виде

$$\tilde{\mathbf{c}} \mathbf{A}^{(1)} \geq \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \geq \mathbf{0}.$$

Рассмотрим вектор  $\mathbf{y}^* = \mathbf{d}_2 = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1}$ . Покажем, что он является оптимальным решением двойственной задачи.

Очевидно, оптимальное решение исходной задачи  $\mathbf{x}^* = \mathbf{h}$  является допустимым решением этой задачи. Вектор  $\mathbf{y}^*$  является допустимым решением двойственной задачи, поскольку

$$\mathbf{y}^* \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{y}^*)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{d}_2^T = (\mathbf{d}_2 \mathbf{A})^T = (\tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^T = (\tilde{\mathbf{c}} \mathbf{A}^{(1)})^T \geq \mathbf{c}^T.$$

При этом значение целевой функции двойственной задачи на векторе  $\mathbf{y}^*$  равно

$$f^* = \mathbf{y}^* \mathbf{b} = \mathbf{d}_2 \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c} \mathbf{h} = z^*.$$

Таким образом, согласно достаточному условию оптимальности решений пары взаимно двойственных задач  $\mathbf{y}^*$  является оптимальным решением двойственной задачи, и первая часть теоремы доказана для симметричной пары двойственных задач (случай несимметричной пары, как обычно, оставляем читателю).

Отметим, что базисному оптимальному решению исходной задачи соответствует базисное оптимальное решение двойственной задачи, которое оказывается записанным в последней строке окончательной симплексной таблицы исходной задачи.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть функция  $z$  не ограничена сверху. Рассмотрим некоторое допустимое решение двойственной задачи  $\mathbf{y}^\circ$ , значение целевой функции двойственной задачи на этом решении обозначим  $f^\circ = \mathbf{y}^\circ \mathbf{b}$  — очевидно,  $f^\circ < +\infty$ . Так как целевая функция исходной задачи не ограничена на множестве допустимых решений, найдется такое допустимое решение  $\mathbf{x}^\circ$ , что значение  $z^\circ$  целевой функции исходной задачи на этом решении будет больше числа  $f^\circ + 1$ :  $z^\circ = \mathbf{c}\mathbf{x}^\circ > f^\circ + 1$ . Но согласно основному неравенству теории двойственности  $\mathbf{c}\mathbf{x}^\circ \leq \mathbf{y}^\circ \mathbf{b}$ , поэтому можно записать:

$$f^\circ + 1 < \mathbf{c}\mathbf{x}^\circ \leq \mathbf{y}^\circ \mathbf{b} = f^\circ —$$

получили противоречие, доказывающее вторую часть теоремы.  $\square$

**Экономическое содержание** основной теоремы двойственности состоит в том, что в терминах оценок данная теорема может быть сформулирована следующим образом: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения минимальных оценок ресурсов, причем цена продукта, полученного реализацией оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой имеющихся ресурсов.

**ТЕОРЕМА О ДОПОЛНЯЮЩЕЙ НЕЖЕСТКОСТИ.** *Для того, чтобы допустимые решения*

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}^* = (y_1^* \ y_2^* \ \cdots \ y_m^*)$$

*пары двойственных задач являлись оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$y_j^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4.7)$$

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.8)$$

т. е. если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в точное равенство оптимальным решением этой задачи, то соответствующая компонента оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального решения одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в

двойственной задаче ее оптимальным решением должно обращаться в точное равенство. Другими словами, если  $y_i^* > 0$  для некоторого  $i$ , то

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i, \quad (3.4.7')$$

а если  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$ , то

$$y_i^* = 0; \quad (3.4.7'')$$

если  $x_j^* > 0$  для некоторого  $j$ , то

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j, \quad (3.4.8')$$

а если  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > 0$ , то

$$x_j^* = 0; \quad (3.4.8'')$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{y}^*$  являются оптимальными решениями пары двойственных задач. В силу условий (3.4.2) и (3.4.5) должны выполняться неравенства

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \mathbf{y}\mathbf{b}^*, \quad (3.4.9)$$

а так как по основной теореме двойственности

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}\mathbf{b}^*$$

соотношения (3.4.9) должны иметь вид строгих равенств:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^*, \quad (3.4.10)$$

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^*. \quad (3.4.11)$$

Из равенства (3.4.10) следует, что

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0,$$

откуда, учитывая, что все  $x_j^*$  и все выражения в скобках неотрицательны, получаем:

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и соотношения (3.4.7) доказаны.

Аналогично из равенства (3.4.11) получаем, что

$$\sum_{j=1}^n y_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^* \right) = 0,$$

откуда, в силу неотрицательности как  $y_i^*$ , так и выражений в скобках, следует, что каждое слагаемое

$$y_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^* \right), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

должно быть равно нулю, и мы приходим к соотношениям (3.4.8).

**Достаточность.** Просуммируем равенства (3.4.7) по  $j$ , а равенства (3.4.8) по  $i$ . Получим, что

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^*,$$

откуда видно, что значения целевых функций пары двойственных задач в точках  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{y}^*$  совпадают.

Тогда согласно достаточному условию оптимальности решений пары взаимно двойственных задач  $\mathbf{x}^*$  и  $\mathbf{y}^*$  являются оптимальными решениями соответствующих задач двойственной пары, и теорема о дополняющей нежесткости полностью доказана.  $\square$

Рассмотрим **экономическое содержание** второй теоремы двойственности. Для этого обратимся последовательно к утверждениям (3.4.7')—(3.4.7'') и (3.4.8')—(3.4.8''). Утверждения (3.4.7') и (3.4.7'') можно истолковать следующим образом.

Если по оптимальному плану производства  $\mathbf{x}^*$  расход  $i$ -го ресурса  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*$  строго меньше его запаса  $b_i$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i,$$

то оценка  $y_i^*$  единицы этого ресурса равна нулю:

$$y_i^* = 0;$$

если же оценка  $i$ -го ресурса строго больше нуля:

$$y_i^* > 0,$$

то расход этого ресурса равен его запасу:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Таким образом, оценки оптимального плана выступают как мера дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс, полностью используемый по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а недефицитный ресурс, не полностью используемый, имеет нулевую оценку.

Условия (3.4.8') и (3.4.8'') можно истолковать так. Если суммарная оценка  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*$  ресурсов, расходуемых при производстве единицы  $j$ -го продукта, строго больше цены этого продукта:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j,$$

то  $j$ -й продукт по оптимальному плану производить не следует:

$$x_j^* = 0;$$

если же по оптимальному плану производства  $j$ -й продукт производится, т. е.

$$x_j^* > 0,$$

то суммарная оценка ресурсов, необходимых для производства единицы  $j$ -го продукта, должна быть равна цене этого продукта:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j.$$

Таким образом, оценки оптимального плана выступают как инструмент определения эффективности отдельных технологических способов. Данный способ производства используется в том и только в том случае, когда при его реализации оценка затраченных ресурсов и цена полученной продукции совпадают.

Предположим, что в условиях исходной задачи (3.4.1)—(3.4.3) вектор запасов ресурсов изменился и стал равен не  $\mathbf{b}$ , а  $\mathbf{b}_{\text{нов.}} = \mathbf{b} + \mathbf{t}$ . При этом в последней симплексной таблице, схематично представленной в табл. 3.4.1, изменится только столбец  $\mathbf{h}$  — вместо  $\mathbf{h} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$  он будет равен

$$\mathbf{h}_{\text{нов.}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} = \mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t},$$

а также оптимальное значение целевой функции — вместо  $z^* = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{h}$  оно будет равно

$$z_{\text{нов.}}^* = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{h}_{\text{нов.}} = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{t} = \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{t} = z^* + \mathbf{y}^* \mathbf{t}.$$

где мы учли, что  $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{h}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}} \mathbf{h} = z^*$ ,  $\tilde{\mathbf{c}} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{y}^*$ .

Поскольку симплексные оценки в последней строке последней симплексной таблице не изменились и остались неотрицательными, решение  $\mathbf{h}_{\text{нов.}}$  будет оптимальным решением задачи с измененными правыми частями в том и только в том случае, когда оно будет допустимым. Но всем ограничениям по ресурсам это решение удовлетворяет по построению, значит, оно будет оптимальным в том и только в том случае, когда будет неотрицательным:

$$\mathbf{h}_{\text{нов.}} = \mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Таким образом, доказано еще одно утверждение.

**УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК.** Для того чтобы двойственные оценки ресурсов не изменились при изменении вектора запасов ресурсов с  $\mathbf{b}$  до  $\mathbf{b} + \mathbf{t}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Тесная связь между решениями пары двойственных задач линейного программирования состоит также и в том, что характер изменения величины  $z^*$  можно определить с помощью компонент оптимального решения двойственной задачи.

**ТЕОРЕМА ОБ ОЦЕНКАХ ВЛИЯНИЯ РЕСУРСОВ НА ВЫПУСК ПРОДУКЦИИ.** Значения переменных  $y_i^*$  в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния правых частей  $b_i$  системы ограничений исходной задачи на величину максимума ее целевой функции:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*.$$

**Доказательство.** Пусть

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta b_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$z_{\text{нов.}}^* = z^* + \mathbf{y}^* \mathbf{t} = z^* + y_i^* \Delta b_i,$$

поэтому

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lim_{\Delta b_i \rightarrow 0} \frac{z_{\text{нов.}}^* - z^*}{\Delta b_i} = \lim_{\Delta b_i \rightarrow 0} \frac{y_i^* \Delta b_i}{\Delta b_i} = y_i^*,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Остается указать на **экономическое содержание** данной теоремы — оно очевидно: двойственная оценка ресурса — это приращение выручки, приходящееся на единицу приращения этого ресурса.

Поэтому покупать дополнительно  $i$ -й ресурс имеет смысл тогда и только тогда, когда его рыночная цена  $p_i$  меньше двойственной оценки  $y_i$ .

Заметим, что здесь речь идет лишь о достаточно малых приращениях ресурсов, так как изменение величины  $b_i$  в некоторый момент вызовет изменение оценок  $y_i$ .

Двойственные оценки позволяют выявить направление мероприятий по расширке узких мест производства, обеспечивающих получение наибольшего экономического эффекта.

Аналогично можно рассмотреть вопрос об области устойчивости решения исходной задачи при изменении вектора цен с  $\mathbf{c}$  до  $\mathbf{c} + \mathbf{m}$ . Для этого нужно записать условие устойчивости применительно к двойственной задаче — предлагаем читателю самостоятельно записать такое условие.

### § 3.5. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Доказательство основной теоремы двойственности дает идею метода решения задач линейного программирования, в которых система ограничений не имеет предпочитаемой формы.

Рассмотрим, например, задачу (3.4.4)—(3.4.6). Запишем в развернутом виде:

$$f = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m - y_{m+1} & = c_1, \\ a_{13}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m & - y_{m+2} & = c_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m & & - y_{m+n} & = c_n, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0, y_{m+1} \geq 0, y_{m+2} \geq 0, \dots, y_{m+n} \geq 0,$$

сразу заменив неравенства на уравнения с помощью введения дополнительных балансовых неизвестных  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ .

Ясно, что симплексный метод для решения данной задачи напрямую неприменим, поскольку ни в одном из уравнений нет базисной неизвестной.

Можно к решению данной задачи применить метод искусственного базиса, но тогда придется ввести еще  $n$  искусственных базисных неизвестных, и общая размерность системы ограничений составит  $n \times (m + 2n)$ .

Однако совершенно очевидно, что задача (3.4.4)—(3.4.6), двойственная к (3.4.4)—(3.4.6), имеет размерность системы ограничений  $m \times n$  и может быть решена обычным симплексным методом, при этом последняя симплексная таблица в строке оценок содержит оптимальное решение двойственной задачи:

$$y_1^* = \Delta_{n+1}, y_2^* = \Delta_{n+2}, \dots, y_m^* = \Delta_{n+m}.$$

**ПРИМЕР 3.5.1.** Требуется составить задачу, двойственную к задаче о диете из примера 3.3.1, решить составленную задачу и найти решение задачи о диете из последней симплексной таблицы.

**Решение.** Задача о диете из примера 3.3.1 имела следующий вид:

$$\begin{aligned} z &= 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 40x_2 \geq 40, \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 4, \\ 50x_1 + 20x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Составим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} f &= 40y_1 + 4y_2 + 30y_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 10y_2 + 50y_3 \leq 60, \\ 40y_1 + 20y_2 + 20y_3 \leq 50, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

которую решим обычным симплексным методом (табл. 3.5.1).

В последней строке симплексной таблицы видим решение исходной задачи:  $x_1 = 1/5$ ,  $x_2 = 1$ . В данном примере мы нашли решение гораздо быстрее, чем с помощью метода искусственного базиса.  $\square$

**Двойственный симплексный метод** основывается именно на этой идее, только он применяется сразу к исходной задаче, в которой не выделен базис, не требуя составления двойственной задачи в явном виде.

Таблица 3.5.3

$\tilde{c}$	Базис	$h$	40	4	30	0	0
			$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$y_4$	60	0	10	50	1	0
0	$y_5$	50	40	20	20	0	1
	$f_0 - f$	$0 - f$	-40	-4	-30	0	0
0	$y_4$	60	0	10	50	1	0
40	$y_1$	5/4	1	1/2	1/2	0	1/40
	$f_0 - f$	$50 - f$	0	16	-10	0	1
30	$y_3$	6/5	0	1/5	1	1/50	0
40	$y_1$	13/20	1	2/5	0	-1/100	1/40
	$f_0 - f$	$62 - f$	0	18	0	1/5	1

Процесс начинается при наличии базисного решения, удовлетворяющего условию оптимальности (все  $\Delta_j \geq 0$ ), но не являющегося допустимым ввиду наличия отрицательных компонент  $x_j \leq 0$ .

На каждом шаге вначале находят разрешающее уравнение  $r$ , соответствующее наименьшей отрицательной правой части:

$$\min_{i=1, 2, \dots, m} (h_i < 0) = h_r, \quad (3.5.13)$$

затем определяют разрешающую неизвестную  $s$  по правилу

$$\max_{j=1, 2, \dots, n} \left( \frac{\Delta_i}{g_{rj} < 0} \right) = \frac{\Delta_r}{g_{rs}}, \quad (3.5.14)$$

Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получено оптимальное допустимое базисное решение либо не будет установлена неразрешимость задачи.

**ПРИМЕР 3.5.2.** Требуется решить задачу о диете из примера 3.3.1 двойственным симплексным методом.

**Решение.** Задача о диете из примера 3.3.1 имела следующий вид:

$$z = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 40x_2 \geq 40, \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 4, \\ 50x_1 + 20x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Введем балансовые неизвестные  $x_3, x_4, x_5$  и домножим целевую функцию и все ограничения на  $(-1)$ :

$$z = -60x_1 - 50x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -40x_2 + x_3 = -40, \\ -10x_1 - 20x_2 + x_4 = -4, \\ -50x_1 - 20x_2 + x_5 = -30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Процесс решения этой задачи двойственным симплексным методом иллюстрируется табл. 3.5.2.

Таблица 3.5.1

$\tilde{c}$	Базис	$h$	-60	-50	0	0	0
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	-40	0	-40	1	0	0
0	$x_4$	-4	-10	-20	0	1	0
0	$x_5$	-30	-50	-20	0	0	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	60	50	0	0	0
-50	$x_2$	1	0	1	-1/40	0	0
0	$x_4$	16	-10	0	-1/2	1	0
0	$x_5$	-10	-50	0	-1/2	0	1
	$z_0 - z$	$-50 - z$	60	0	5/4	0	0
-50	$x_2$	1	0	1	-1/40	0	0
0	$x_4$	18	0	0	2/5	1	-1/5
-60	$x_1$	1/5	1	0	1/100	0	-1/50
	$z_0 - z$	$-62 - z$	0	0	13/20	0	6/5

В последней симплексной таблице видим решение исходной задачи:  $x_1 = 1/5$ ,  $x_2 = 1$ .  $\square$

### § 3.6. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи математического программирования, в которых наряду с обычными ограничениями накладывается требование целочисленности всех или некоторых компонент решения, изучает раздел математического программирования, который называется **целочисленным программированием**.

С принципиальной точки зрения задача целочисленного программирования достаточно проста: для ее решения достаточно пронумеровать все целочисленные элементы множества допустимых решений и затем последовательно вычислять значения целевой функции в этих точках, запоминая на каждом шаге тот из уже проверенных элементов, для которого значение целевой функции было наибольшим (или наименьшим). Однако

часто, особенно в экономических задачах, такая процедура практически нереализуема из-за очень большого или бесконечного числа элементов множества допустимых решений. Другой подход к решению этой задачи позволяет отбрасывать не отдельные точки, а достаточно большие подмножества заведомо неоптимальных элементов множества допустимых решений. Эта идея положена в основу алгоритмов, которые принято относить к **методу ветвей и границ**.

Рассмотрим применение метода ветвей и границ к решению следующей задачи целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned} p = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, k \ (k \leq n). \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Здесь  $\underline{x}_j$  и  $\bar{x}_j$  — это конечные константы.

Если  $k = n$ , то задача называется полностью целочисленной, если же  $k < n$ , то частично целочисленной.

Суть метода ветвей и границ заключается в том, что оптимальное решение задачи (3.1.1) будет удовлетворять также одному и только одному из условий:

$$x_j \leq z_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.6.2)$$

или

$$x_j \geq z_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.6.3)$$

где  $z_j$  — произвольное целое число из отрезка  $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ .

Основная идея метода ветвей и границ — осуществить ветвление, т. е. разбить исходную задачу (3.6.1) на две другие задачи с дополнительными ограничениями соответственно вида (3.6.2) и (3.6.3) для какого-то  $l$  (от 1 до  $k$ ) и решить каждую из них как обычную (непрерывную) задачу линейного программирования, игнорируя требование целочисленности. Этот процесс повторяется для различных  $l$  и  $z_l$ .

Выбор  $z_l$  можно осуществить следующим образом: если оптимальное решение задачи

$$\begin{aligned} p = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

удовлетворяет условию целочисленности, то оно является и оптимальным решением задачи целочисленного программирования (3.6.1); в противном случае рассматривается одна из переменных  $x_l$  [из числа тех, на которые накладывается условие целочисленности, но которая в оптимальном решении

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_l^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

задачи (3.6.4) принимает дробное значение].

На основе полученного решения  $x^*$  обычной задачи (3.6.4) проводим ветвление, описываемое соотношениями вида (3.6.2), (3.6.3), — формируем две новые задачи (квадратными скобками обозначена целая часть числа):

$$p = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.6.5)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_l \leq [x_l^*];$$

$$p = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.6.6)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_l \geq [x_l^*] + 1.$$

Далее мы решаем эти задачи и проверяем их оптимальные решения на целочисленность. Если они не удовлетворяют требованию целочисленности, то на основе каждой задачи составляются две новые (аналогично рассмотренным выше). При этом обычно ветвление начинают с наиболее «перспективной» задачи — с лучшим значением целевой функции. Последовательность получаемых таким образом задач образует древовидную структуру, пример которой показан на рис. 3.6.1.

При этом ограничения каждой из двух новых задач, полученных в результате ветвления по очередной переменной, включают ограничения родительской задачи и новое ограничение на эту переменную. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не выполнится один из следующих **критериев окончания ветвления**.

1. Получена задача, не имеющая решения (это становится все более вероятным с увеличением числа ветвлений, когда все больше и больше ограничений вида (3.6.2) или (3.6.3) добавляется к уже существующим ограничениям, т. е. все более вероятной становится несовместность системы ограничений получаемых задач).

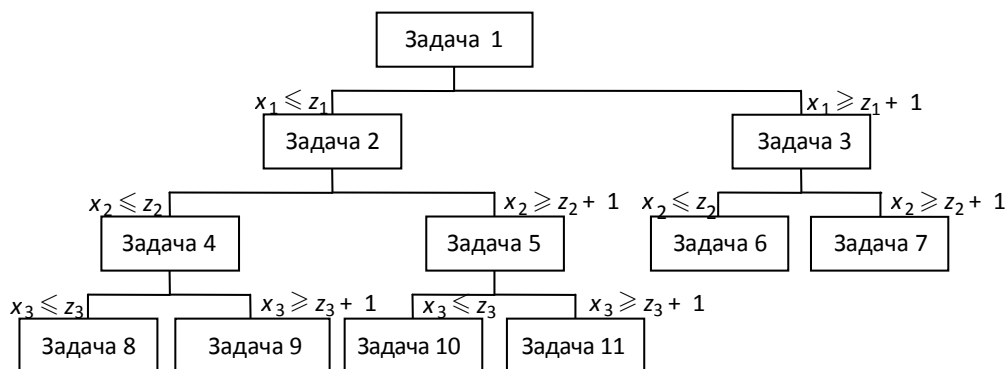
2. Получена задача с решением, удовлетворяющим условию целочисленности, т. е. все  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) имеют целочисленные значения. Тогда значение целевой функции данного решения сравнивается с верхним (нижним при минимизации) рекордом  $p_{\text{рек}}$ . Рекорд на первом шаге принимается равным  $p_{\text{рек}} = -\infty$ , если решается задача на максимум (и  $p_{\text{рек}} = +\infty$  при решении задачи минимизации). Если полученное значение хуже рекорда, то оно отбрасывается, а если лучше, то принимается за новый рекорд (при решении задач на максимум «лучше» означает «больше», а «хуже» — «меньше»; при решении задач на минимум все наоборот). Так как в каждой новой задаче добавляется все больше верхних и нижних целочисленных ограничений на переменные, то непрерывные переменные рано или поздно примут целочисленные значения (если, конечно, целочисленное решение вообще существует).
3. Получена задача с нецелочисленным решением, значение целевой функции на котором хуже рекорда (т. е. хуже, чем у наилучшего из числа найденных целочисленных решений). Добавление последующих ограничений посредством ветвления не поможет улучшить значение целевой функции, поэтому продолжать ветвление не имеет смысла.

После окончания процесса ветвления оптимальным является такое целочисленное решение, для которого значение целевой функции будет наилучшим, т. е. совпадет с рекордом.

Таким образом, для получения целочисленного решения методом ветвей и границ приходится решать большое количество обычных задач линейного программирования, причем в каждом очередном ветвлении число ограничений увеличивается на единицу.

Поэтому время решения задачи целочисленного программирования по сравнению с непрерывной задачей значительно увеличивается. При этом, вообще говоря, оптимальное целочисленное решение для некоторых задач может быть получено в результате сравнения всех допустимых целочисленных решений.

Пример практического применения метода ветвей и границ будет разобран в параграфе 4.2 при решении задачи о расшивке узких мест производства.




**Рис. 3.6.1.** Древовидная структура последовательности задач в методе ветвей и границ

### § 3.7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПАКЕТЕ MICROSOFT EXCEL

Пакет Microsoft Excel предоставляет средства для решения задач нелинейного программирования в надстройке «Поиск решения», работу с которой опишем в следующем примере.

**ПРИМЕР 3.7.1.** Требуется найти решение задачи линейного программирования (3.2.18)—(3.2.20) из примера 2.5.1 с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.

**Решение.** Введем в рабочий лист Microsoft Excel формулы, как показано на рис. 3.7.1, *а*. Ячейки A2:E2 отведем под координаты вектора оптимального решения задачи в ячейки A5:E5 поместим коэффициенты целевой функции, в ячейки A8:E9 — элементы матрицы системы уравнений (3.2.19), а в ячейки I8:I9 — правые части. В ячейки G8:G9 введем формулы для вычисления левых частей уравнений, а в ячейку A12 — формулу для вычисления целевой функции (рис. 3.7.1, *а*, *б*).

Запустим надстройку «Поиск решения». Для этого на вкладке «Данные» нужно нажать кнопку « Поиск решения». (Если такая кнопка на вкладке «Данные» отсутствует, нужно выбрать пункт меню «Файл | Параметры», в появившемся диалоговом окне «Параметры Excel» выбрать пункт «Надстройки», далее в выпадающем списке «Управление» выбрать элемент «Надстройки Excel», нажать кнопку «Перейти», и во вновь открывшемся диалоговом окне «Надстройки» отметить в качестве доступной надстройку «Поиск решения».)

В появившемся окне ввода данных (рис. 3.7.2) укажем ячейку \$A\$12, в которую введена целевая функция, отметим, что требуется искать максимум этой функции, изменяя значения переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $x_5$  (под которые отведены ячейки \$A\$2:\$E\$2) при наличии ограничений  $Ax = b$  (\$G\$8:\$G\$9  $\leq$  \$I\$8:\$I\$9).

Отметим также пункт «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» в соответствии с ограничениями неотрицательности (3.2.20).

В качестве метода решения выберем «Поиск решения линейных задач симплекс-методом».

Результаты работы надстройки «Поиск решения» представлены на рис. 3.7.1, *в* — замечаем совпадение с результатами ручных вычислений в примере 3.2.1, где было получено оптимальное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 17, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 0.$$

Кроме оптимальных значений переменных и максимального значения целевой функции, надстройка «Поиск решения» позволяет получить также отчеты по результатам, устойчивости и пределам. Эти отчеты представлены на рис. 3.7.3. Предлагаем читателю самостоятельно их интерпретировать.  $\square$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x								
2									
3									
4	c								
5	-3	4	-5	17	-1				
6									
7	A					Ax		b	
8	1	0	1	-2	4	=СУММПРОИЗВ(A8:E8; A\$2:E\$2)			5
9	0	1	-1	3	1	=СУММПРОИЗВ(A9:E9; A\$2:E\$2)			1
10									
11	z								
12	=СУММПРОИЗВ(A5:E5; A\$2:E\$2)								

а) формулы Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x								
2									
3									
4	c								
5	-3	4	-5	17	-1				
6									
7	A					Ax		b	
8	1	0	1	-2	4		0		5
9	0	1	-1	3	1		0		1
10									
11	z								
12	0								

б) результат ввода формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x								
2	0	0	17	6	0				
3									
4	c								
5	-3	4	-5	17	-1				
6									
7	A					Ax		b	
8	1	0	1	-2	4		0		5
9	0	1	-1	3	1		0		1
10									
11	z								
12	17								

в) результаты решения

**Рис. 3.7.3.** Исходные данные и результаты решения задачи линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения»

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Добавить  
Изменить  
Удалить  
Сбросить  
Загрузить/сохранить

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Рис. 3.7.2. Ввод данных в надстройку «Поиск решения»

Microsoft Excel. Отчет о результатах

Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Модуль поиска решения

Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом

Время решения: 0,01 секунд.

Число итераций: 3 Число подзадач: 0

Параметры поиска решения

Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Точность 0,000001

Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
\$A\$12	z	0	17

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$A\$2	x	0	0	Продолжить
\$B\$2		0	0	Продолжить
\$C\$2		0	17	Продолжить
\$D\$2		0	6	Продолжить
\$E\$2		0	0	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
\$G\$8	Ax	5	\$G\$8=\$I\$8	Привязка	0
\$G\$9	Ax	1	\$G\$9=\$I\$9	Привязка	0

б) отчет о результатах

Microsoft Excel. Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное значение	Приведенная стоимость	Целевая функция коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$A\$2	x	0	-5	-3	5	1E+30
\$B\$2		0	-3	4	3	1E+30
\$C\$2		17	0	-5	1E+30	1,142857143
\$D\$2		6	0	17	1E+30	3
\$E\$2		0	-16	-1	16	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное значение	Теневая цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$G\$8	Ax	5	2	5	1E+30	5,666666667
\$G\$9	Ax	1	7	1	1E+30	6

в) отчет об устойчивости

Microsoft Excel. Отчет о пределах

Целевая функция						
Ячейка	Имя	Значение				
\$A\$12	z	17				
Переменная			Нижний предел	Целевая функция Результат	Верхний предел	Целевая функция Результат
Ячейка	Имя	Значение				
\$A\$2	x	0	-8,9E-15	17	-8,9E-15	17
\$B\$2		0	0	17	0	17
\$C\$2		17	17	17	17	17
\$D\$2		6	6	17	6	17
\$E\$2		0	-2,2E-15	17	-2,2E-15	17

г) отчет о пределах

Рис. 3.7.3. Отчеты о результатах, устойчивости и пределах, полученные с помощью надстройки «Поиск решения»

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Решите данные задачи линейного программирования: а) графическим методом; б) методом искусственного базиса:

$$\begin{array}{lll} 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, & 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, & z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ -2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2 \leq x_1 + x_2 \leq 11, \\ -8 \leq 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 7. \end{cases} \end{array}$$

2. Витамины  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которых требуется в день 6, 8 и 2 г соответственно, содержатся в двух видах продуктов. Цена первого продукта равна 50 руб./кг, цена второго продукта — 20 руб./кг., при этом в 1 кг первого продукта содержится 2 г витамина  $A$ , 4 г витамина  $B$  и 2 г витамина  $C$ ; в 1 кг второго продукта содержится соответственно 2 и 3 г витаминов  $A$  и  $B$  (витамин  $C$  во втором продукте не содержится). Поставьте задачу составления пищевого рациона минимальной стоимости и решите эту задачу: а) графическим методом; б) методом искусственного базиса; в) двойственным симплексным методом.
3. Решите данные задачи линейного программирования симплексным методом:

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \rightarrow \max, & z = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \text{а) } \begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 7x_2 + 3x_4 - 9x_5 - 4x_6 \rightarrow \min, \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + 5x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 4, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ x_3 - 8x_4 - 4x_5 + 5x_6 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 35x_5 - 20x_6 \rightarrow \min, \\ \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_4 + 7x_5 - 3x_6 = 1, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 6, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 - 2x_6 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

4. Решите данные задачи линейного программирования методом искусственного базиса:

$$\begin{aligned} & 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 16x_4 - 2x_5 \rightarrow \min, \\ \text{а) } & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \rightarrow \min \\ \text{б) } & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Для каждой из данных задач линейного программирования сформулируйте двойственную задачу и решите ее графически, а затем с помощью теоремы о дополняющей нежесткости найдите решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 \rightarrow \min, \\ \text{а) } & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 15x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 15x_4 + 17x_5 + 20x_6 \rightarrow \min, \\ \text{б) } & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6 \geq 75, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Для каждой из данных задач линейного программирования сформулируйте двойственную задачу и найдите оптимальные решения обеих задач:

$$\begin{aligned} & 9x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, & 10x_1 + 12x_2 \rightarrow \min \\ \text{а) } & \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ 5x_1 - 4x_2 = 13, \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ 5x_1 - x_2 \leq 15, \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, x_2 - \text{любого знака}; & x_1 - \text{любого знака}, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

7. Решите данные задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ:

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, & x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ \text{а) } & \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leq 21, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \leq 51, \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

## ГЛАВА 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ И ЦЕПЯМИ ПОСТАВОК

### § 4.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Мы уже неоднократно рассматривали задачу оптимального планирования производства. Проведем подробное исследование конкретного примера такой задачи с использованием всей изученной теории.

**ПРИМЕР 4.1.1.** Предприятие может выпускать четыре вида продукции, используя для этого три вида ресурсов. Известна технологическая матрица **A** затрат каждого из ресурсов на единицу каждой продукции, вектор **b** объемов ресурсов и вектор **c** цен продукции:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = (36 \ 14 \ 25 \ 50).$$

Требуется определить производственную программу, обеспечивающую предприятию наибольшую выручку при имеющихся ограниченных ресурсах.

**Решение.** Математическая модель задачи такова: *требуется найти производственную программу*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

*максимизирующую выручку*

$$z = 36x_1 + 14x_2 + 25x_3 + 50x_4 \rightarrow \max$$

*при ограничениях по ресурсам*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 208, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_4 \leq 107, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 181, \end{cases}$$

причем по смыслу задачи

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Для решения этой задачи линейного программирования симплексным методом систему неравенств при помощи дополнительных неотрицательных неизвестных  $x_5, x_6, x_7$  заменим системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 & = 208, \\ 2x_1 + 5x_2 & + 2x_4 & + x_6 & = 107, \\ 3x_1 + x_2 & + 2x_3 + 2x_4 & & + x_7 = 181, \end{cases}$$

в которой дополнительные переменные  $x_5, x_6$  и  $x_7$  имеют смысл остатков ресурсов (соответственно первого, второго и третьего вида). Среди всех решений системы уравнений, удовлетворяющих условиям неотрицательности

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0,$$

нужно найти то решение, при котором целевая функция примет наибольшее значение.

Воспользуемся тем, что правые части всех уравнений системы неотрицательны, а сама система имеет предпочитаемый вид — дополнительные переменные являются базисными, поэтому можно применить симплексный метод. Процесс решения записан в виде последовательности симплексных таблиц в табл. 4.1.1.

Таблица 4.1.1

$\tilde{c}$	Базис	$h$	36	14	25	50	0	0	0	Пояснения
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_5$	208	4	3	4	5	1	0	0	$z_0 = \tilde{c}h, \Delta_j = \tilde{c}g_j - c_j, j = 1, 2, \dots, n;$ $\min(\Delta_j < 0) = -50, \min\left(\frac{b_i}{a_{i4}} > 0\right) = \frac{181}{5}$
0	$x_6$	107	2	5	0	2	0	1	0	
0	$x_7$	181	3	1	2	5	0	0	1	
	$z_0 - z$	$0 - z$	-36	-14	-25	-50	0	0	0	
0	$x_5$	27	1	2	2	0	1	0	-1	$\min(-6; -4; -5) = -6,$ $\min\left(\frac{27}{1}; \frac{173/5}{4/5}; \frac{181/5}{3/5}\right) = \frac{27}{1}$
0	$x_6$	173/5	4/5	23/5	-4/5	0	0	1	-2/5	
50	$x_4$	181/5	3/5	1/5	2/5	1	0	0	1/5	
	$z_0 - z$	$1810 - z$	-6	-4	-5	0	0	0	10	
36	$x_1$	27	1	2	2	0	1	0	-1	все $\Delta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$
0	$x_6$	13	0	3	-12/5	0	-4/5	1	2/5	
50	$x_4$	20	0	-1	-4/5	1	-3/5	0	4/5	
	$z_0 - z$	$1972 - z$	0	8	7	0	6	0	4	

За каждой симплексной таблицей стоит система четырех линейных уравнений, из которых первые три представляют некоторый предпочитаемый эквивалент системы условий задачи и определяют соответствующее базисное допустимое решение, а из последнего уравнения получается выражение целевой функции через свободные неизвестные. Как видно из последней симплексной таблицы, оптимальной является производственная программа  $x_1 = 27$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = 20$ , обеспечивающая предприятию наибольшую прибыль  $z^* = 1972$ ; при этом остаток ресурса первого вида  $x_5 = 0$ , второго вида  $x_6 = 13$ , третьего вида  $x_7 = 0$ .

Обратим внимание на экономический смысл элементов последней строки симплексной таблицы. Оценочные коэффициенты  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  и  $\Delta_4$  имеют смысл *оценок технологий* и показывают, насколько уменьшится выручка, если произвести единицу соответствующей продукции.

Например, коэффициент  $\Delta_3 = 7$  при переменной  $x_3$  показывает, что если произвести одну единицу продукции третьего вида (она не входит в оптимальную производственную программу), то выручка уменьшится на 7 руб.

Оставшиеся коэффициенты  $\Delta_5$ ,  $\Delta_6$  и  $\Delta_7$  имеют смысл двойственных оценок ресурсов и показывают, насколько возрастет выручка, если первоначальные запасы соответствующего ресурса увеличить на единицу. Так, увеличение на единицу запаса первого ресурса приведет к увеличению выручки на  $\Delta_5 = 6$  единиц.

Двойственные оценки представляют собой оптимальное решение задачи, двойственной к исходной задаче планирования производства: это такие внутренние цены  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , что суммарная внутренняя стоимость всех имеющихся ресурсов минимальна при условии, что внутренняя стоимость ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукции каждого вида, не меньше той цены, по которой единицу соответствующей продукции можно продать на рынке.

Для производства единицы продукции первого вида мы должны затратить, как видно из матрицы **A**, 4 единицы ресурса первого вида, 2 единицы ресурса второго вида и 3 единицы третьего (элементы первого столбца матрицы). В ценах  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  наши затраты составят  $4y_1 + 2y_2 + 3y_3$ . При реализации единицы первой продукции на рынке мы получили бы 36 руб. Следовательно, внутренняя оценка стоимости ресурсов, из которых можно изготовить единицу первого продукта ( $4y_1 + 2y_2 + 3y_3$ ), должна составлять не менее 36 руб. Аналогичные условия должны выполняться и для всех остальных видов продукции.

При этом суммарная оценка всех имеющихся ресурсов  $208y_1 + 107y_2 + 181y_3$  должна быть минимальной.

Окончательно двойственная задача формулируется так: *требуется найти вектор двойственных оценок*

$$y = (y_1 \ y_2 \ y_3),$$

минимизирующий общую оценку всех ресурсов

$$f = 208y_1 + 107y_2 + 181y_3 \rightarrow \min$$

при условии, что по каждому виду продукции суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, не меньше выручки, получаемой от реализации единицы этой продукции:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 36, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 14, \\ 4y_1 + 2y_3 \geq 25, \\ 5y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 50, \end{cases}$$

причем оценки ресурсов не могут быть отрицательными:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Запишем теорему о дополняющей нежесткости для этой задачи:

$$\begin{aligned} y_1(4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 208) &= 0, \\ y_2(2x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 107) &= 0, \\ y_3(3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 181) &= 0, \\ x_1(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ x_2(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ x_3(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ x_4(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0 \end{aligned}$$

и подставим в эти уравнения уже известную оптимальную производственную программу  $x_1 = 27; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 20$ :

$$\begin{aligned} y_1(4 \cdot 27 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 20 - 208) &= 0, & 27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ y_2(2 \cdot 27 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 20 - 107) &= 0, & 0(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ y_3(3 \cdot 27 + 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 20 - 181) &= 0, & 0(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ & & 20(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1(208 - 208) &= 0, & 27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) &= 0, \\ y_2(94 - 107) &= 0, & 0(3y_1 + 5y_2 + y_3 - 14) &= 0, \\ y_3(181 - 181) &= 0, & 0(4y_1 + 2y_3 - 25) &= 0, \\ & & 20(5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50) &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений  $[y_2(94 - 107) = 0]$  означает, что поскольку второй ресурс используется не полностью (при выполнении оптимальной производственной программы расходуется 94 единицы из 107), его двойственная оценка  $y_2 = 0$ . Четвертое уравнение  $[27(4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36) = 0]$  означает, что поскольку первый продукт входит в оптимальную производственную программу ( $x_1 = 27$ ), то суммарная двойственная оценка ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукта первого вида ( $4y_1 + 2y_2 + 3y_3$ ) должна быть равна цене этого продукта (36 руб.). Из последнего уравнения следует, что поскольку четвертый продукт входит в оптимальную производственную программу ( $x_4 = 20$ ), то суммарная двойственная оценка ресурсов, из которых можно изготовить единицу продукта четвертого вида ( $5y_1 + 2y_2 + 5y_3$ ) должна быть равна цене этого продукта (50 руб.). Итак,

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 36 = 0, \\ 5y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 50 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим окончательно, что  $y_2 = 0$ ,  $y_2 = 4$ .

Предлагаем студенту самостоятельно получить решение задачи с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel и прокомментировать содержание отчетов о результатах, устойчивости и пределах.  $\square$

## § 4.2. ЗАДАЧА О РАСШИВКЕ УЗКИХ МЕСТ ПРОИЗВОДСТВА

При выполнении оптимальной производственной программы может оказаться так, что некоторые ресурсы расходуются полностью. Говорят, что такие ресурсы образуют *узкие места производства*. Наличие узких мест в силу неустойчивости решения задач линейного программирования может привести к тому, что потеря достаточно малого количества некоторого ресурса, имеющего сравнительно низкую стоимость (относительно суммарной прибыли) может привести к тому, что оптимальное значение прибыли уменьшится намного сильнее, чем на стоимость потерянного ресурса. Рассмотрим тривиальный пример.

**ПРИМЕР 4.2.1.** Предприятие собирает автомобили из готовых узлов и агрегатов. Для изготовления одного автомобиля требуется один кузов с подвеской (в сборе), один двигатель и четыре колеса. Производство одного автомобиля приносит предприятию чистую прибыль 50 тыс. руб. В наличии у предприятия имеется 2 кузова, 2 двигателя и 8 колес. Требуется определить, какие убытки принесет предприятию потеря (в результате хищения) одного колеса (стоимостью 2 тыс. руб.).

**Решение.** Казалось бы, убытки предприятия равны 2 тыс. руб. Но это не так! Из 2 кузовов, 2 двигателей и 8 колес предприятие могло изготовить 2

автомобиля и получить прибыль 100 тыс. руб. После утраты колеса предприятие может собрать только 1 автомобиль и получить прибыль в 2 раза меньше — всего 50 тыс. руб. Конечно, недостающее колесо можно приобрести, но это требует времени, которое предприятию придется простаивать... Итак, если колесо можно купить мгновенно, то убытки предприятия составляют 2 тыс. руб., если колесо купить вообще невозможно, то убытки предприятия составят 50 тыс. руб., а в общем случае убытки равны стоимости простоя предприятия в течение того времени, которое занимает закупка колеса).  $\square$

Будем расширять узкие места производства, т. е. закажем дополнительно те ресурсы, которые полностью используются при выполнении оптимальной производственной программы. Пусть

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} —$$

вектор дополнительных объемов ресурсов.

Прирост выручки, связанный с вовлечением в производство  $t_1$  дополнительных единиц первого ресурса,  $t_2$  — второго, ...,  $t_m$  —  $m$ -го, равен

$$w = \mathbf{y}\mathbf{t} = \sum_{i=1}^m y_i t_i,$$

так как двойственные оценки этих ресурсов ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) показывают, насколько увеличится выручка при добавлении к имеющимся запасам единицы соответствующего ресурса. Естественно этот прирост прибыли максимизировать.

Чтобы двойственные оценки не изменились при переходе от вектора запасов ресурсов от  $\mathbf{b}$  к вектору  $\mathbf{b} + \mathbf{t}$ , должно выполняться условие устойчивости двойственных оценок:

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Кроме того, как правило, производитель не может получить неограниченно много ресурсов, т. е. все компоненты вектора  $\mathbf{t}$  ограничены.

В общем случае расшивка узких мест производства позволяет максимально задействовать имеющийся потенциал предприятия по производству данной продукции по данным технологиям в условиях существующих цен.

**ПРИМЕР 4.2.2.** Требуется решить задачу о расшивке узких мест производства в условиях примера 4.1.1 при условии, что поставщики не могут поставить дополнительно более трети от первоначальных запасов ресурсов.

**Решение.** При выполнении оптимальной производственной программы в условиях примера 4.1.1 первый и третий ресурсы используются полностью, т. е. образуют узкие места производства. Будем их заказывать дополнительно. Пусть

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} —$$

вектор дополнительных объемов ресурсов.

При этом вектор запасов ресурсов изменится от

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}$$

до

$$\mathbf{b} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 208 + t_1 \\ 107 \\ 181 + t_3 \end{pmatrix}.$$

Производственная программа, содержащаяся в последней симплексной таблице, выразится через новый вектор запасов ресурсов при помощи обращенного базиса

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/5 & 1 & 2/5 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$\mathbf{h}_{\text{нов.}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{t}) = \mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t}.$$

Прирост выручки, связанный с вовлечением в производство  $t_1$  дополнительных единиц первого ресурса и  $t_3$  — третьего, равен

$$w = 6t_1 + 4t_3, \quad (4.2.1)$$

так как двойственные оценки этих ресурсов ( $y_1 = 6$  и  $y_3 = 4$ ) показывают, насколько увеличится выручка при добавлении к имеющимся запасам единицу соответствующего ресурса.

Чтобы двойственные оценки не изменялись, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие устойчивости двойственных оценок

$$\mathbf{h} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$$

или

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/5 & 1 & 2/5 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Условие, которое состоит в том, что производитель не может получить более трети первоначальных запасов ресурсов, запишется как

$$\mathbf{t} \leq \frac{1}{3}\mathbf{b}$$

или

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} \leq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 208 \\ 107 \\ 181 \end{pmatrix}.$$

В скалярной форме последнее условие запишется так:

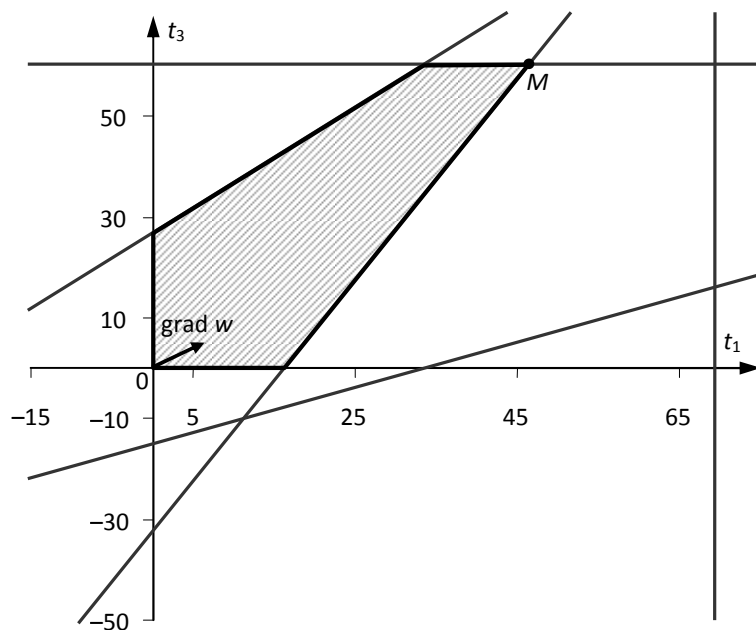
$$\begin{cases} t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Таким образом, задача о расшивке узких мест производства формулируется следующим образом: *требуется максимизировать дополнительный прирост прибыли (4.2.1), связанный с вовлечением в производство  $t_1 \geq 0$  дополнительных единиц первого ресурса и  $t_3 \geq 0$  — третьего, при выполнении условия устойчивости двойственных оценок (4.2.2) и условия (4.2.3), означающего, что невозможно заказать дополнительно более трети первоначальных запасов ресурсов.*

Окончательно задача о расшивке узких мест производства запишется так:

$$\begin{aligned} w = 6t_1 + 4t_3 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20, \\ t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}, \\ t_1 \geq 0, \quad t_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Эту задачу легко решить графически: область допустимых решений задачи (4.2.4) заштрихована на рис. 4.2.1.



**Рис. 4.2.1.** Графическое решение задачи о расшивке узких мест производства

Самая дальняя точка этой области в направлении, указываемом градиентом целевой функции

$$\text{grad } w = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ —}$$

это точка  $M$ , которая задается пересечением прямых, задаваемых вторым и пятым из ограничений задачи:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 = 13, \\ t_3 = \frac{181}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, программа расшивки узких мест имеет вид

$$t_3 = \frac{181}{3} = 60\frac{1}{3}, \quad t_1 = \frac{5}{4}\left(13 + \frac{2}{5}t_3\right) = \frac{5}{4}\left(13 + \frac{2}{5} \cdot \frac{181}{3}\right) = \frac{557}{12} = 46\frac{5}{12}.$$

Решение оказалось нецелочисленным. Если речь идет о недельном плане производства, который будет действовать в течение предстоящего года, то это решение означает просто, что 5 из 12 недель нужно заказывать по 47 единиц первого ресурса, а оставшиеся 7 недель — по 46 единиц.

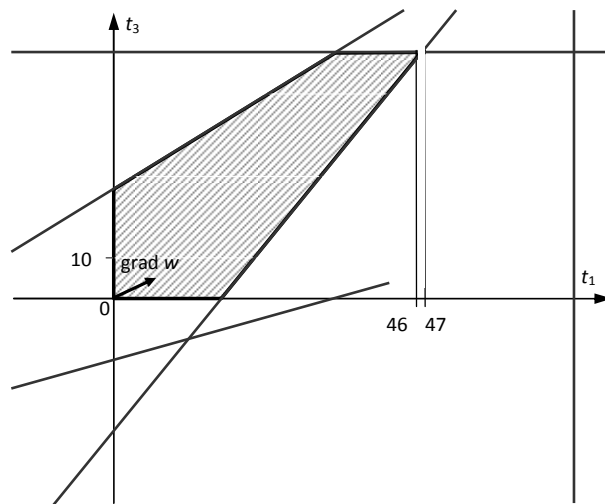
Если же речь идет о плане на последнюю неделю года, то необходимо найти целочисленное решение задачи.

Произведем ветвление по переменной  $t_1$  — получим две новые задачи:

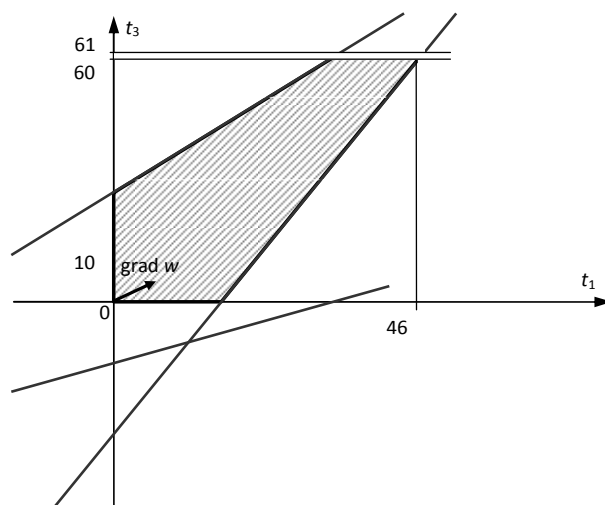
$$\begin{aligned}
 &w = 6t_1 + 4t_3 \rightarrow \max, \\
 &\begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20, \\ t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}, \\ t_1 \leq 46, \end{cases} \quad (4.2.5) \\
 &t_1 \geq 0, t_3 \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &w = 6t_1 + 4t_3 \rightarrow \max, \\
 &\begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20, \\ t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}, \\ t_1 \geq 47, \end{cases} \quad (4.2.6) \\
 &t_1 \geq 0, t_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Это ветвление иллюстрируется рис. 4.2.2, а. Задача (4.2.5) имеет нецелочисленное оптимальное решение  $t_1 = 46$ ,  $t_3 = 181/3 = 60\frac{1}{3}$ , а задача (4.2.6) не имеет решений (значит, эта ветвь метода ветвей и границ обрывается).



а) первый шаг ветвления



б) второй шаг ветвления

**Рис. 4.2.2.** Применение метода ветвей и границ к решению целочисленной задачи о расшивке узких мест производства

Произведем ветвление в задаче (4.2.5); оно проиллюстрировано рис. 4.2.2, б; получим две новые задачи:

$$\begin{aligned} w = 6t_1 + 4t_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20, \\ t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}, \\ t_1 \leq 46, \\ t_3 \leq 60, \\ t_1 \geq 0, t_3 \geq 0; \end{cases} \quad (4.2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = 6t_1 + 4t_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -t_1 + t_3 \leq 27, \\ \frac{4}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_3 \leq 13, \\ \frac{3}{5}t_1 - \frac{4}{3}t_3 \leq 20, \\ t_1 \leq \frac{208}{3}, \\ t_3 \leq \frac{181}{3}, \\ t_1 \leq 46, \\ t_3 \geq 61, \\ t_1 \geq 0, t_3 \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.8) \end{aligned}$$

Задача (4.2.9) имеет целочисленное оптимальное решение  $t_1 = 46$ ,  $t_3 = 60$ , а задача (4.2.10) не имеет решений (значит, эта ветвь обрывается).

Таким образом, получено оптимальное целочисленное решение задачи о расшивке узких мест производства: необходимо дополнительно получить 46 единиц первого ресурса и 60 единиц третьего.

Отметим, что в данной задаче целочисленного программирования решение получено достаточно быстро и является тривиальным (округлением компонент оптимального решения сопутствующей нецелочисленной задачи). В задачах целочисленного программирования, вообще говоря, так бывает довольно редко.  $\square$

## § 4.1. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

**Транспортная задача** формулируется следующим образом. Однородный продукт, сосредоточенный в  $m$  пунктах производства (хранения) в количествах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц, необходимо распределить между  $n$  пунктами потребления, которым необходимо соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения — *транспортный тариф* — равна  $c_{ij}$  и известна для всех маршрутов. Необходимо составить план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и суммарные транспортные расходы по доставке продуктов были минимальны.

Если производство и потребление сбалансированы, т. е. суммарные запасы продукта у поставщиков равны суммарным запросам потребителей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.1.1)$$

то такая транспортная задача называется *закрытой* или *замкнутой*.

Если же суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше или строго меньше, чем суммарные запросы потребителей, то такая задача называется *открытой*.

Для сведения открытой задачи к закрытой вводятся фиктивные пункты производства или потребления. Если суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше, чем суммарные запросы потребителей, вводится фиктивный потребитель, запросы которого равны

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

если же суммарные запасы продукта у поставщиков строго больше, чем суммарные запросы потребителей, то вводится фиктивный поставщик, запас продукта у которого равен

$$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Если в результате решения транспортной задачи окажется, что определенное количество продукта придется доставить фиктивному потребителю, на практике это будет означать, что товар останется в пункте отправления. Поэтому на доставку товара из всех пунктов отправления фиктивному потребителю назначаются тарифы, равные стоимости хранения единицы груза либо стоимости его утилизации (если недоставленный товар не может быть в дальнейшем использован). Аналогично, на доставку товара от фиктивного поставщика во все пункты назначения назначаются тарифы, равные штрафу за недопоставку единицы продукции (поскольку доставка  $x_{ij}^{\text{фикт.}}$  единиц товара в  $j$ -й пункт потребления от фиктивного поставщика с номером  $i$  означает на практике, что  $j$ -му потребителю будет доставлено на  $x_{ij}^{\text{фикт.}}$  единиц товара меньше, чем он запросил).

Обозначим через  $x_{ij}$  количество груза, планируемого к перевозке от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю. При наличии баланса производства и потребления (4.1.1) **математическая модель закрытой транспортной задачи** будет выглядеть так: *требуется найти план перевозок*

$$\mathbf{X} = (x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

*минимизирующий общую стоимость всех перевозок*

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (4.1.2)$$

*при условии, что из любого пункта производства вывозится весь продукт:*

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1.3)$$

и любому потребителю доставляется необходимое количество груза:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.4)$$

причем по смыслу задачи

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{mn} \geq 0. \quad (4.1.5)$$

**ТЕОРЕМА.** *Закрытая транспортная задача всегда имеет решение.*

**Доказательство.** Закрытая транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования. При этом множество допустимых решений непусто, поскольку, например, допустимым решением, очевидно, является набор чисел

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{j=1}^n a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Действительно,

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{mn} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{\sum_{j=1}^n a_i} = a_i \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{\sum_{j=1}^n a_i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^m a_i} = b_j \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{i=1}^m a_i} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку  $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \dots, x_{mn} \geq 0$ , минимизируемая целевая функция

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ограничена снизу нулем на множестве допустимых решений. Таким образом, утверждение теоремы доказано.  $\square$

**ТЕОРЕМА.** *Ранг матрицы коэффициентов системы уравнений (4.1.3)—(4.1.4) равен  $m + n - 1$ .*

**Доказательство.** Запишем систему уравнений (4.1.3)—(4.1.4) в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1, \\ & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2, \\ & & \vdots \\ & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} & + x_{21} & + \dots + x_{m1} = b_1, \\ & x_{12} & + x_{22} & + \dots + x_{m2} = b_2, \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & x_{1n} & + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{array} \right.$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ строк} \\ n \text{ строк} \end{array} \right\} \left( \begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array} \right).$$

Сумма первых  $m$  строк имеет вид

$$\left( 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \middle| \ \sum_{i=1}^m a_i \right),$$

сумма последних  $n$  строк равна

$$\left( 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \middle| \ \sum_{j=1}^n b_j \right).$$

Вычтем из суммы первых  $m$  строк сумму последних  $n$  строк, получим нулевую строку, так как транспортная задача закрытая и

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Таким образом, ранг матрицы системы ограничений закрытой транспортной задачи меньше  $m + n$ .

Рассмотрим теперь линейную комбинацию первых  $m + n - 1$  строк матрицы системы, взятых с коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_{m+n-1}$ . Чтобы она обращалась в нуль, должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_{m+1} &= 0, \alpha_1 + \alpha_{m+2} = 0, \alpha_1 + \alpha_{m+n-1} = 0, \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_{m+1} &= 0, \alpha_2 + \alpha_{m+2} = 0, \alpha_2 + \alpha_{m+m-1} = 0, \alpha_2 = 0, \\ \alpha_m + \alpha_{m+1} &= 0, \alpha_m + \alpha_{m+2} = 0, \alpha_m + \alpha_{m+m-1} = 0, \alpha_m = 0, \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{m+j} b_j &= 0.\end{aligned}$$

Это, очевидно, возможно в том и только в том случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_{m+n-1} = 0$ . Таким образом, первые  $m + n - 1$  строк матрицы системы линейно независимы, значит, ранг матрицы системы не меньше  $m + n - 1$ .

Итак, ранг матрицы системы ограничений закрытой транспортной задачи равен  $m + n - 1$ , поскольку он меньше  $m + n$ , но не меньше  $m + n - 1$ .

Утверждение теоремы доказано.  $\square$

Поскольку число неизвестных в закрытой транспортной задаче равно  $mn$ , а ранг системы ограничений равен  $m + n - 1$ , оптимальное решение закрытой транспортной задачи, как правило, неединственно.

Рассмотрим **постановку задачи, двойственной к закрытой транспортной задаче** (4.1.2)—(4.1.5). Каждому ограничению (4.1.3) поставим в соответствие двойственную переменную  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), каждому ограничению (4.1.4) — двойственную переменную  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). При этом, поскольку ограничения (4.1.3), (4.1.4) представляют собой уравнения, переменные  $p_i$  и  $q_j$  могут принимать значения любого знака.

Задача, двойственная к задаче (4.1.2)—(4.1.5), имеет вид

$$\sum_{i=1}^m a_i p_i + \sum_{j=1}^m b_j q_j \rightarrow \max, \quad (4.1.6)$$

$$p_i + q_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.7)$$

**ТЕОРЕМА.** *Задача, двойственная к транспортной, всегда имеет оптимальное решение.*

**Доказательство** следует из того, что имеет решение исходная задача (4.1.2)—(4.1.5).  $\square$

**ТЕОРЕМА.** *Допустимое решение закрытой транспортной задачи (4.1.2)—(4.1.5)*

$$x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и допустимое решение

$$p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

задачи (4.1.6)—(4.1.7), двойственной к транспортной, являются оптимальными решениями соответствующих задач тогда и только тогда, когда

$$x_{ij}(p_i + q_j - c_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Доказательство.** Согласно теореме о дополняющей нежесткости, для того чтобы допустимые решения транспортной задачи и задачи, двойственной к транспортной, были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$p_i \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.1.8)$$

$$q_j \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} - b_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.9)$$

$$x_{ij}(p_i + q_j - c_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.10)$$

Условия (4.1.8) и (4.1.9) выполняются для любых допустимых решений задач (4.1.2)—(4.1.5) и (4.1.6)—(4.1.7), и поэтому не накладывают никаких ограничений на  $p_i$  и  $q_j$ . Существенными для переменных  $p_i$  и  $q_j$  являются только условия (4.1.10).  $\square$

Для решения транспортной задачи применяется **метод потенциалов**, который состоит из шагов. На первом шаге строится некоторый начальный план перевозок, т. е. выбирают произвольное базисное допустимое решение задачи (4.1.2)—(4.1.5). На каждом из последующих шагов проверяется оптимальность последнего найденного плана перевозок, и если план не оптимален, то производится перераспределение поставок с целью сокращения их суммарной стоимости — для этого по определенным правилам производится переход от одного базисного решения к другому. Каждый шаг метода потенциалов сопровождается заполнением транспортной таблицы (табл. 4.1.1), строки которой соответствуют поставщикам (в заголовках строк указываются запасы продукта у поставщиков  $a_i$ ), а столбцы соответствуют потребителям (в заголовках столбцов указываются запросы потребителей  $b_j$ ). В клетки транспортной таблицы заносятся поставки продукта, перевозимого от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю ( $x_{ij}$ ). Кроме того, в правом верхнем углу каждой клетки указывается стоимость перевозки единицы продукта от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю ( $c_{ij}$ ).

Таблица 4.1.1

Потребление Производство	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$
$a_1$	$x_{11}$ $c_{11}$	$x_{12}$ $c_{12}$	...	$x_{1n}$ $c_{1n}$
$a_2$	$x_{21}$ $c_{21}$	$x_{22}$ $c_{22}$	...	$x_{2n}$ $c_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$a_m$	$x_{m1}$ $c_{m1}$	$x_{m2}$ $c_{m2}$	...	$x_{mn}$ $c_{mn}$

По любой транспортной таблице можно восстановить соответствующий предпочитаемый эквивалент системы уравнений (4.1.3)—(4.1.4): в таблице записаны лишь правые части уравнений, причем номер клетки показывает, какая неизвестная в соответствующем уравнении является базисной.

Так как в системе (4.1.3)—(4.1.4) ровно  $m + n - 1$  линейно независимых уравнений, то на каждом шаге в транспортной таблице должно быть ровно  $m + n - 1$  занятых клеток.

Первое базисное допустимое решение легко построить по **правилу северо-западного угла**. В соответствии с этим правилом, заполнение транспортной таблицы начинается с левой верхней клетки («северо-западного угла») и состоит из однотипных шагов, на каждом из которых из рассмотрения исключается один поставщик или один потребитель:

- если остаток продукта у  $i$ -го поставщика после предыдущих шагов меньше, чем неудовлетворенный запрос  $j$ -го потребителя, то исключается из рассмотрения  $i$ -й поставщик, и в клетку  $(i, j)$  заносится поставка  $x_{ij}$ , равная остатку продукта у  $i$ -го поставщика после предыдущих шагов;
- если остаток продукта у  $i$ -го поставщика после предыдущих шагов больше, чем неудовлетворенный запрос  $j$ -го потребителя, то исключается из рассмотрения  $j$ -й потребитель, и в клетку  $(i, j)$  заносится поставка  $x_{ij}$ , равная неудовлетворенному запросу  $j$ -го потребителя;
- если остаток продукта у  $i$ -го поставщика после предыдущих шагов равен неудовлетворенному запросу  $j$ -го потребителя, то исключается из рассмотрения или  $i$ -й поставщик, или  $j$ -й потребитель, и в клетку  $(i, j)$  заносится поставка  $x_{ij} = 0$  равная остатку продукта у  $i$ -го поставщика после предыдущих шагов.

После этого рассматривается левая верхняя клетка среди тех, которые остаются после вычеркивания строк, соответствующих поставщикам, весь запас продукта у которых уже распределен по потребителям, и столбцов, соответствующих потребителям, запросы которых уже удовлетворены.

Существуют и другие методы построения начального плана перевозок (например, метод минимального элемента предполагает заполнение клеток не в направлении «северо-запад — юго-восток», а начиная с наименьшего транспортного тарифа). Однако эти методы при сколь-нибудь существенных размерах транспортных таблиц не дают существенного вычислительного выигрыша по сравнению с методом северо-западного угла.

Когда транспортная таблица содержит некоторое базисное допустимое решение транспортной задачи, начинают вычисление потенциалов.

Каждому поставщику ставится в соответствие потенциал  $p_i$ , а каждому потребителю — потенциал  $q_j$ . При этом каждой клетке соответствует некоторая оценка

$$\Delta_{ij} = p_i + q_j - c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.11)$$

Один из потенциалов можно выбрать произвольно, так как в системе (4.1.3)—(4.1.4) одно уравнение линейно зависит от остальных. Обычно полагают  $p_1 = 0$ . Остальные потенциалы вычисляются из условия, что для базисных клеток  $\Delta_{ij} = 0$ .

Затем по формуле (4.1.9) вычисляются оценки всех свободных клеток. Если хотя бы одна из оценок строго положительна, то базисное допустимое решение, содержащееся в данной транспортной таблице, не является оптимальным. Выбирается свободная клетка  $(r, s)$ , соответствующая наибольшей положительной оценке

$$\Delta_{rs} = \max_{i, j} (\Delta_{ij} > 0).$$

Для выбранной свободной клетки  $(r, s)$  строится *цикл пересчета* — замкнутая ломаная, одна из вершин которой находится в данной свободной клетке, а все остальные — в занятых клетках, соседние звенья взаимно перпендикулярны, сами звенья параллельны строкам и столбцам таблицы. Можно доказать, что для любой свободной клетки невырожденной закрытой транспортной задачи цикл пересчета всегда существует, является единственным и состоит из четного числа вершин.

Клетка  $(r, s)$  помечается знаком «плюс», далее соседние вершины цикла пересчета помечаются по очереди знаками «минус», «плюс». Выбирается минимальная из поставок, отмеченных знаком «минус» ( $\rho_{\max}$ ), и к поставкам, отмеченным знаком «плюс», добавляется  $\rho_{\max}$ , а из поставок отмеченных знаком «минус», вычитается  $\rho_{\max}$ . Так производится перераспределение поставок вдоль цикла пересчета, при котором происходит такой **переход к новому базисному допустимому решению**, что в клетку

$(r, s)$ , соответствующую наибольшей положительной оценке  $\Delta_{rs}$ , поставятся максимально возможное количество продукта  $p_{\max}$ . При этом от всех поставщиков продукт полностью вывозится, и запросы всех потребителей полностью удовлетворяются.

Заполняется новая транспортная таблица, вычисляются новые потенциалы и оценки клеток и т. д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена транспортная таблица (и соответствующий план перевозок), для которой все

$$\Delta_{ij} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Соответствующее последней транспортной таблице базисное решение является оптимальным.

**ПРИМЕР 4.1.1.** Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах в количествах  $a_1, a_2, a_3$  единиц, необходимо распределить между четырьмя потребителями, которым необходимо соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4$  единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения равна  $c_{ij}$  и известна для всех маршрутов.

Векторы **a**, **b** и матрица **C** таковы:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 54 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (41 \ 50 \ 44 \ 30), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить план перевозок, при котором запросы всех потребителей были бы удовлетворены за счет имеющегося на складах объема продукции, так чтобы общие транспортные расходы по доставке продукции были минимальны.

**РЕШЕНИЕ.** Составим математическую модель транспортной задачи при заданном векторе объемов производства **a**, векторе потребления **b** и матрице транспортных издержек **C** и решим эту транспортную задачу методом потенциалов.

Общий объем производства  $\sum_{i=1}^3 a_i = 54 + 60 + 63 = 177$  больше, чем суммарные запросы всех потребителей  $\sum_{j=1}^4 b_j = 41 + 50 + 44 + 30 = 165$ , т. е. мы имеем открытую модель транспортной задачи. Для превращения ее в закрытую введем фиктивный пункт потребления с объемом потребления  $177 - 165 = 12$  единиц, причем тарифы на перевозку в этот пункт условимся считать равными нулю, помня, что переменные, добавляемые к левым частям неравенств для превращения их в уравнения, входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

Первое базисное допустимое решение построим по правилу северо-западного угла (табл. 4.1.2).

Таблица 4.1.2

Потребление Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	<div>1 41</div>	<div>4 13</div>	<div>3</div>	<div>2</div>	<div>0</div>	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	<div>3</div>	<div>6 37</div>	<div>2 23</div>	<div>5</div>	<div>0</div>	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	<div>2 *</div>	<div>5</div>	<div>6 21</div>	<div>7 30</div>	<div>0 12</div>	$p_3 = 6$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 1$	$q_5 = -6$	

Положим  $p_1 = 0$  и найдем остальные потенциалы из условия, что для базисных клеток  $\Delta_{ij} = 0$ :

$$\Delta_{11} = 0, \quad p_1 + q_1 - c_{11} = 0, \quad 0 + q_1 - 1 = 0, \quad q_1 = 1,$$

$$\Delta_{12} = 0, \quad p_1 + q_2 - c_{12} = 0, \quad 0 + q_2 - 4 = 0, \quad q_2 = 4,$$

$$\Delta_{22} = 0, \quad p_2 + q_2 - c_{22} = 0, \quad p_2 + 4 - 6 = 0, \quad p_2 = 2,$$

и т. д. В результате получим:  $q_3 = 0, p_3 = 6, q_4 = 1, q_5 = -6$ .

Затем по формуле (4.1.6) вычислим оценки всех свободных клеток:

$$\Delta_{13} = p_1 + q_3 - c_{13} = 0 + 0 - 3 = -3, \quad \Delta_{14} = p_1 + q_4 - c_{14} = 0 + 1 - 2 = -1,$$

$$\Delta_{15} = p_1 + q_5 - c_{15} = 0 - 6 - 0 = -6, \quad \Delta_{21} = p_2 + q_1 - c_{21} = 2 + 1 - 3 = 0,$$

$$\Delta_{24} = -2, \quad \Delta_{25} = -4, \quad \Delta_{31} = 5, \quad \Delta_{32} = 5.$$

Находим наибольшую положительную оценку:

$$\max_{i,j} (\Delta_{ij} > 0) = 5 = \Delta_{31}.$$

Для найденной свободной клетки (3, 1) построим цикл пересчета:

$$(3, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3).$$

Производим перераспределение поставок вдоль цикла пересчета (на рис. 4.1.2, а  $\rho_{\max} = 21$ ), получаем второе базисное допустимое решение (табл. 4.1.3).

41	13		→	41 - ρ	13 + ρ		→	20	34	
	37	23			37 - ρ	23 + ρ			16	44
*		21		ρ		21 - ρ		21		

а) при переходе ко второму базисному решению

20	*	→	20 - ρ	ρ	→		20
21	30		21 + ρ	30 - ρ		41	10

б) при переходе к третьему базисному решению

**Рис. 4.1.1.** Перераспределение поставок вдоль цикла пересчета

**Таблица 4.1.3**

Потребление Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	1 20	4 34	3	2 *	0	$p_1 = 0$
$a_2 = 60$	3	6 16	2 44	5	0	$p_2 = 2$
$a_3 = 63$	2 21	5	6	7 30	0 12	$p_3 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 6$	$q_5 = -1$	

Находим новые потенциалы, новые оценки. Наибольшую положительную оценку будет иметь свободная клетка (1, 4). Для нее строим цикл пересчета

$$(1, 4) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 4),$$

производим перераспределение (на рис. 4.1.2, б  $\rho_{\max} = 20$ ) и получаем третье базисное допустимое решение. Продолжаем процесс дальше (табл. 4.1.4—4.1.6). В табл. 4.1.6  $\Delta_{11} = 0$ ,  $\Delta_{13} = -3$ ,  $\Delta_{15} = -2$ ,  $\Delta_{21} = 0$ ,  $\Delta_{24} = -1$ ,  $\Delta_{33} = -5$ ,  $\Delta_{34} = -4$ ,  $\Delta_{35} = -2$ . Поскольку все оценки неположительны, базисное допустимое решение

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 30 \\ 0 & 4 & 44 & 0 \\ 41 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным.  $\square$

Таблица 4.1.4

Потребление Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	1	4	3	2	0	$p_1 = 0$
		34		20		
		–		+		
$a_2 = 60$	3	6	2	5	0	$p_2 = 2$
		16	44			
$a_3 = 63$	2	5	6	7	0	$p_3 = 5$
	41	*		10	12	
		+		–		
	$q_1 = -3$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -5$	

Таблица 4.1.5

Потребление Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	1	4	3	2	0	$p_1 = 0$
		24		30		
$a_2 = 60$	3	6	2	5	0	$p_2 = 2$
		16	44		*	
		–			+	
$a_3 = 63$	2	5	6	7	0	$p_3 = 1$
	41	10			12	
		+			–	
	$q_1 = 0$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -1$	

Таблица 4.1.6

Потребление Производство	$b_1 = 41$	$b_2 = 50$	$b_3 = 44$	$b_4 = 30$	$b_5 = 12$	
$a_1 = 54$	1	4	3	2	0	$p_1 = 0$
		24		30		
$a_2 = 60$	3	6	2	5	0	$p_2 = 2$
		4	44		12	
$a_3 = 63$	2	5	6	7	0	$p_3 = 1$
	41	22				
	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 0$	$q_4 = 2$	$q_5 = -2$	

Для вычисления потенциалов необходимо  $m + n - 1$  уравнений (4.1.6), т. е. на каждом шаге метода потенциалов число занятых клеток должно сохраняться.

При этом в случае невырожденной задачи все  $m + n - 1$  компоненты базисного решения будут строго положительными, а всем свободным неизвестным будут соответствовать нулевые перевозки. В случае вырожденной задачи некоторые из перевозок, соответствующие базисным неизвестным, также могут быть равны нулю, однако число базисных неизвестных остается равным  $m + n - 1$ .

Если на каком-либо шаге перераспределение поставок вдоль цикла пересчета приводит к освобождению более чем одной клетки, все освобожденные клетки, за исключением одной (не важно, какой), нужно по-прежнему считать занятыми. Для того в эти клетки вместо поставки вписывается число нуль, и эти клетки с фиктивными поставками участвуют в вычислении потенциалов наравне с другими.

План перевозок, содержащий фиктивные поставки, называется *вырожденным*. При следующем перераспределении перемещаться будут как раз нулевые, вырожденные поставки, и план перевозок фактически не изменится. Но при этом изменится набор занятых клеток, изменятся потенциалы и оценки свободных клеток, и решение можно будет продолжать.

**ПРИМЕР 4.1.2.** Требуется решить транспортную задачу со следующими исходными данными:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (20 \ 50), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Общий объем производства  $\sum_{i=1}^3 a_i = 20 + 40 + 10 = 70$  совпадает с суммарными запросами потребителей  $\sum_{j=1}^2 b_j = 20 + 50 = 70$ , значит, транспортная задача является закрытой. Построим в табл. 4.1.7 первое базисное допустимое решение по правилу северо-западного угла.

В задаче  $m = 3$  поставщика,  $n = 2$  потребителя, значит, должно быть заполнено  $m + n - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$  клетки транспортной таблицы, но в табл. 4.1.7 заполненными являются только три клетки. В связи с этим невозможно вычислить потенциалы и проверить оптимальность плана перевозок.

Проблема решается просто: достаточно заполнить еще одну клетку фиктивной нулевой поставкой. Например, поставим нуль в клетку (1, 2), теперь у нас заполнены четыре клетки, можно вычислить потенциалы (табл. 4.1.8).

Вычисленные оценки  $\Delta_{21} = 0$ ,  $\Delta_{31} = -3$  свидетельствуют об оптимальности плана перевозок, содержащегося в табл. 4.1.8.  $\square$

Таблица 4.1.7

Потребление Производство	$b_1 = 20$	$b_2 = 50$	
$a_1 = 20$	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</span>	$p_1 = 0$
$a_2 = 40$	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	40 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">4</span>	$p_2 = ?$
$a_3 = 10$	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	10 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	$p_3 = ?$
	$q_1 = 1$	$q_2 = ?$	

Таблица 4.1.8

Потребление Производство	$b_1 = 20$	$b_2 = 50$	
$a_1 = 20$	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</span>	0 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</span>	$p_1 = 0$
$a_2 = 40$	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	40 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">4</span>	$p_2 = 2$
$a_3 = 10$	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</span>	10 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</span>	$p_3 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 2$	

**ПРИМЕР 4.1.3.** Требуется решить транспортную задачу со следующими исходными данными:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (15 \ 40), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Общий объем производства  $\sum_{i=1}^3 a_i = 25 + 15 + 15 = 55$  совпадает с суммарными запросами потребителей  $\sum_{j=1}^2 b_j = 15 + 40 = 55$ , значит, транспортная задача является закрытой.

Построим в табл. 4.1.9 первое базисное допустимое решение по правилу северо-западного угла.

Таблица 4.1.9

Потребление Производство	$b_1 = 15$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 25$	<div>5</div> <div>15</div>	<div>2</div> <div>10</div>	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	<div>2</div> <div>*</div>	<div>4</div> <div>15</div>	$p_2 = 2$
$a_3 = 15$	<div>5</div>	<div>3</div> <div>15</div>	$p_3 = 1$
	$q_1 = 5$	$q_2 = 2$	

Вычисляем потенциалы, затем оценки свободных клеток  $\Delta_{21} = 5$ ,  $\Delta_{31} = 1$ . Для клетки (2, 1) строим цикл пересчета и перераспределяем поставки. При этом, как видно в табл. 4.1.10, освобождаются две клетки — (1, 1) и (2, 2).

Чтобы число занятых клеток оставалось равным  $m + n - 1 = 4$ , запишем в клетку (1, 1) фиктивную поставку (табл. 4.1.11).

Теперь можно вычислить потенциалы, определить оценки свободных клеток  $\Delta_{22} = -5$ ,  $\Delta_{31} = 1$ . Для клетки (3, 1) строим цикл пересчета и перераспределяем поставки. При этом  $\rho_{\max} = 0$ , т. е. перераспределяется фиктивная поставка, она переходит в клетку (3, 1), а клетка (1, 1) становится свободной.

Оценки свободных клеток  $\Delta_{11} = -1$ ,  $\Delta_{22} = -4$  свидетельствуют об оптимальности найденного в табл. 4.1.6 плана перевозок.  $\square$

Таблица 4.1.10

Потребление Производство	$b_1 = 15$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 25$	<div>5</div>	<div>2</div> <div>25</div>	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	<div>2</div> <div>15</div>	<div>4</div>	$p_2 = ?$
$a_3 = 15$	<div>5</div>	<div>3</div> <div>15</div>	$p_3 = ?$
	$q_1 = ?$	$q_2 = 2$	

Таблица 4.1.11

Потребление Производство	$b_1 = 15$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 25$	5 0	2 25	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	2 15	4	$p_2 = -3$
$a_3 = 15$	5 *	3 15	$p_3 = 1$
	$q_1 = 5$	$q_2 = 2$	

Таблица 4.1.12

Потребление Производство	$b_1 = 15$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 25$	5	2 25	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	2 15	4	$p_2 = -2$
$a_3 = 15$	5 0	3 15	$p_3 = 1$
	$q_1 = 4$	$q_2 = 2$	

Перейдем к обсуждению **экономического смысла** оценок клеток и потенциалов.

Оценка свободной клетки  $\Delta_{ij}$  показывает, насколько уменьшатся суммарные расходы по перевозке груза, если поставить единицу груза от  $i$ -го производителя  $j$ -му потребителю (перераспределив остальные поставки так, чтобы сохранился баланс по строкам и столбцам).

Потенциалы же интерпретируются следующим образом. Производитель с номером  $i$  уплачивает перевозчику одну и ту же цену  $p_i$  за вывоз единицы груза (не важно, какому потребителю этот груз достанется); потребитель с номером  $j$  уплачивает перевозчику одну и ту же цену  $q_j$  за получение единицы груза (не важно, от какого производителя этот груз доставлен); сумма цен, взимаемых при этом с любой пары «производитель – потребитель», не превосходит реальной стоимости перевозки единицы груза от данного производителя к данному потребителю:

$$p_i + q_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.12)$$

При этом и производители, и потребители не заплатят перевозчику больше, чем реальные транспортные расходы, потому перевозчик может установить цены так, чтобы максимизировать свою прибыль:

$$\sum_{i=1}^m a_i p_i + \sum_{j=1}^n b_j q_j \rightarrow \max \quad (4.1.13)$$

при условиях (4.1.10).

Переменные  $p_i$  и  $q_j$  при этом могут быть как положительными, так и отрицательными: не исключено, что перевозчик платит определенному производителю за право перевозить его продукцию (или потребителю — за право доставлять ему продукцию):

$$p_i, q_j \in \mathbb{R}.$$

Задача максимизации функции (4.1.6)—(4.1.7) является двойственной к транспортной задаче (4.1.2)—(4.1.5), и приведенная экономическая интерпретации оценок клеток и потенциалов основана на теоремах двойственности.

В реальных условиях  $p_i$  и  $q_j$  — это не цены, а надбавки к основному тарифу перевозчика, единому для всех производителей и потребителей.

Усложним транспортную задачу путем учета **обязательных и запрещенных поставок**.

Предположим, что в потребитель  $i_3$  поставил условие, чтобы ему не поставляли товар от поставщика  $j_3$ , а потребитель  $i_{об.}$  потребовал обязательной поставки не менее  $y_{i_{об.}j_{об.}}$  от поставщика  $j_{об.}$ . Такую задачу можно решить методом потенциалов с незначительными модификациями.

Вопрос с обязательными поставками решается очень легко: нужно поставку необходимого количества товара предусмотреть прежде всего, а потом решить транспортную задачу с уменьшенными на  $y_{i_{об.}j_{об.}}$  (если это, конечно, возможно) параметрами  $a_{i_{об.}}$  и  $b_{j_{об.}}$ .

Что касается запрещенных поставок, то запрет эквивалентен установлению для данного маршрута транспортного тарифа, равного  $+\infty$ . На практике соответствующую клетку в транспортной таблице просто зачеркивают и никогда не заполняют, ни при построении первого базисного решения, ни в процессе последующих шагов.

**ПРИМЕР 4.1.4.** Требуется решить транспортную задачу из примера 4.1.3 при условии, что первому потребителю должно быть поставлено не менее пяти единиц товара от первого поставщика, а поставки от второго поставщика первому потребителю запрещены.

**Решение.** Произведем вначале обязательную поставку 5 единиц товара от первого поставщика первому потребителю. Тогда у первого поставщика останется еще  $25 - 5 = 20$  нераспределенных единиц товара, а первому потребителю останется поставить  $15 - 5 = 10$  единиц.

Заполнив транспортную таблицу в табл. 4.1.13, построим в табл. 4.1.13 первое базисное допустимое решение.

**Таблица 4.1.13**

Потребление Производство	$b_1 = 10$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 20$	5 10	2 10	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	<del>5</del>	15 4	$p_2 = 2$
$a_3 = 15$	* 5	15 3	$p_3 = 1$
	$q_1 = 5$	$q_2 = 2$	

Вычисляем потенциалы, находим оценку единственной свободной клетки  $\Delta_{31} = 1$ , строим цикл пересчета и перераспределяем поставки — получаем табл. 4.1.14, в которой оценка единственной свободной клетки  $\Delta_{11} = -1$ , значит, план перевозок, содержащийся в табл. 4.1.14, является оптимальным.

**Таблица 4.1.14**

Потребление Производство	$b_1 = 10$	$b_2 = 40$	
$a_1 = 20$	5	2 20	$p_1 = 0$
$a_2 = 15$	<del>5</del>	15 4	$p_2 = 2$
$a_3 = 15$	10 5	5 3	$p_3 = 1$
	$q_1 = 4$	$q_2 = 2$	

Вспомним теперь об оптимальной поставке и запишем окончательный оптимальный план перевозок с учетом обязательной и запрещенной поставок:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 0 & 15 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

При этом суммарная стоимость перевозок равна

$$z^* = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 190 \text{ ден. ед.},$$

это на 65 ден. ед. больше чем в примере 4.1.3.  $\square$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Фирма может выпускать два вида изделий, используя четыре вида оборудования. По нормативам для изготовления одного изделия первого вида оборудование первого, второго, третьего и четвертого вида придется занять соответственно на 2, 3, 4 и 1 день. Аналогично, для изготовления одного изделия второго вида те же станки придется занять в течение 6, 3, 0, 2 дней соответственно. Известен фонд времени оборудования первого вида равен 18 дням, второго вида — 15 дням, третьего и четвертого — соответственно 16 и 8 дням. Удельная прибыль от производства одного изделия первого вида составляет 600 руб., а от производства одного изделия второго вида — 900 руб. Составьте математическую модель поставленной задачи и решите эту задачу: а) графическим методом; б) симплексным методом. Найдите оптимальный план производства, обеспечивающий фирме наибольшую прибыль, а также двойственные оценки каждого вида оборудования и дайте им экономическую интерпретацию.
2. Фирма выпускает из железа и проволоки трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида тратится 5 кг железа и 3 кг проволоки, изготовление одного трансформатора второго вида требует затрат 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора фирма получает прибыль 600 и 500 руб. соответственно. Ежемесячно фирма закупает для 4,8 т железа и 3 т проволоки. Определите: а) сколько трансформаторов каждого вида необходимо выпускать для получения максимальной прибыли; б) каковы двойственные оценки ресурсов; в) по каким максимальным ценам имеет смысл закупать ресурсы; г) каковы остатки ресурсов после выполнения месячного оптимального плана производства; д) какие ресурсы образуют узкие места; е) какое оптимальное количество ресурсов, образующих узкие места, следует заказать дополнительно.
3. Запасы однородного товара на складах заданы вектором  $\mathbf{a}$ , заявки клиентов на доставку данного товара — вектором  $\mathbf{b}$ , матрица  $\mathbf{C}$  содержит транспортные тарифы. Стоимость хранения каждой недо-

ставленной единицы товара равна 2 ден. ед., за каждую неудовлетворенную единицу заказанного товара взимается штраф в размере 10 ден. ед. Сравните минимальные суммарные транспортные издержки по доставке товара в случае, когда никаких дополнительных ограничений не накладывается, и в случае, когда второму потребителю должно быть поставлено не менее восьми единиц товара от третьего поставщика, а поставки от второго поставщика первому потребителю запрещены. Векторы **a**, **b** и матрица **C** таковы:

$$\text{а) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 75 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (20 \ 35 \ 25 \ 50), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (20 \ 10 \ 90 \ 10), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & 11 \\ 8 & 3 & 13 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (70 \ 20 \ 15), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (55 \ 45 \ 80), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 \\ 1 & 9 & 12 \\ 10 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 15 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (35 \ 55 \ 40 \ 15), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 12 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 11 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (70 \ 30 \ 25 \ 70), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 & 9 \\ 9 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 13 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

## ГЛАВА 5. МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### § 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача математического программирования в общей постановке формулируется следующим образом: требуется найти вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , доставляющий функции

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.1.1)$$

максимум на множестве допустимых решений, заданных ограничениями

$$\varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.1.2)$$

Если в задаче математического программирования (5.1.1)—(5.1.2) целевая функция  $f(\mathbf{x})$  является дифференцируемой и выпуклой вверх, а левые части всех ограничений  $\varphi_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — дифференцируемыми и выпуклыми вниз, то задача (5.1.1)—(5.1.2) называется **задачей выпуклого программирования**.

Напомним, что функция  $f(\mathbf{x})$  называется *выпуклой вверх* (вогнутой) на множестве  $\mathcal{X}$ , если для любых  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}$  и любых  $\lambda \in [0; 1]$  выполняется неравенство

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^2) \geq \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}^2).$$

Функция  $f(\mathbf{x})$  называется *выпуклой вниз* (выпуклой) на множестве  $\mathcal{X}$ , если для любых  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}$  и любых  $\lambda \in [0; 1]$  выполняется неравенство

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}^2).$$

Если для задач математического программирования в общем случае пока не существует стройной теории, то для задач выпуклого программирования такая теория есть, этой теории и посвящена данная глава.

## § 5.2. УСЛОВИЯ КАРУША — КУНА — ТАККЕРА

Функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2) называется функция

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{b} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})), \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m,$$

при этом координаты  $y_1, y_2, \dots, y_m$  неотрицательного вектора

$$\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m) \in \mathbb{R}_+^m$$

называется *множителями Лагранжа* для задачи выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2).

Если в задаче (3.1.1)—(3.1.2)  $f(\mathbf{x})$  выпукла вверх, а все  $\varphi_i(\mathbf{x})$  выпуклы вниз ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то, очевидно, функция Лагранжа (5.2.1) выпукла вверх по  $\mathbf{x}$ , а по  $\mathbf{y}$  она является и выпуклой вверх, и выпуклой вниз. Действительно, пусть  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0; 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} L(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2, \mathbf{y}) &= \underbrace{f(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2)}_{\geq \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^2)} + \sum_{i=1}^m y_i \underbrace{\left( b_i - \underbrace{\varphi_i(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2)}_{\leq \lambda \varphi_i(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2)} \right)}_{\geq y_i (b_i - \lambda \varphi_i(\mathbf{x}^1) - (1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2))} \geq \\ &\geq \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^2) + \sum_{i=1}^m y_i \left( \underbrace{[\lambda + (1-\lambda)]}_{=1} b_i - \lambda \varphi_i(\mathbf{x}^1) - (1-\lambda)\varphi_i(\mathbf{x}^2) \right) = \\ &= \lambda f(\mathbf{x}^1) + \lambda \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(\mathbf{x}^1)) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^2) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(\mathbf{x}^2)) = \\ &= \lambda L(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) + (1-\lambda)L(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Если теперь  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\lambda \in [0; 1]$ , то

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}^1 + (1-\lambda)\mathbf{y}^2) &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m (\lambda y_i^1 + (1-\lambda)y_i^2) (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})) = \\ &= \underbrace{(\lambda + (1-\lambda))}_{=1} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda y_i^1 (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^m (1-\lambda) y_i^2 (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})) = \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{i=1}^m y_i^1 (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m y_i^2 (b_i - \varphi_i(\mathbf{x})) = \\ &= \lambda L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) + (1-\lambda)L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^2) \end{aligned}$$

Говорят, что задача выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2) удовлетворяет *условию регулярности*, если существует хотя бы одна *внутренняя точка* множества допустимых решений, определяемого неравенствами (3.1.2) [т. е. такая точка  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , что  $\varphi_i(\mathbf{x}) < b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )].

Точка  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$  ( $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}_+^m$ ) называется *седловой точкой* функции  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , если для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}). \quad (5.2.2)$$

**ТЕОРЕМА КУНА — ТАККЕРА.** Если задача выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2) удовлетворяет условию регулярности, то точка  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  является оптимальным решением этой задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор

$$\mathbf{y}^* = (y_1^* \quad y_2^* \quad \dots \quad y_m^*) \in \mathbb{R}_+^m$$

с неотрицательными координатами, что точка  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$  является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи.

**УСЛОВИЯ КАРУША — КУНА — ТАККЕРА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ.** Если функция Лагранжа  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  является выпуклой вверх по  $\mathbf{x}$ , выпуклой вниз по  $\mathbf{y}$  и непрерывно дифференцируемой по всем  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то для того чтобы пара  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}_+^m$  была седловой точкой функции Лагранжа  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.3)$$

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2.4)$$

$$y_i^* \left. \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2.5)$$

$$y_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.6)$$

**ПРИМЕР 5.2.1 (ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ).** Для задачи

$$f(\mathbf{x}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 \rightarrow \max, \quad (5.2.7)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases} \quad (5.2.8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (5.2.9)$$

проверить выполнение условия регулярности, и если оно выполняется, составить функцию Лагранжа, записать условия Каруша — Куна — Таккера в дифференциальной форме и найти оптимальное решение задачи как точку, удовлетворяющую условиям Каруша — Куна — Таккера.

**Решение.** Такая задача, в которой целевая функция квадратичная, а ограничения — линейные, носит название *задачи квадратичного программирования*.

Очевидно, условие регулярности выполняется, поскольку, например, точка

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является внутренней точкой множества допустимых решений — все ограничения в этой точке выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 8 < 15, \\ 1 + 8 < 10, \\ 1 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа (5.2.1):

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 + y_1(15 - 3x_1 - x_2) + y_2(10 - x_1 - x_2) + y_3x_1 + y_4x_2.$$

Здесь мы учли, в том числе, и ограничения (5.2.9), которые преобразовали к такому виду:  $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0$ .

Производные функции Лагранжа равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_1} &= -2(x_1 - 8) - 3y_1 - y_2 + y_3, & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_2} &= -2(x_2 - 8) - y_1 - y_2 + y_4, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_1} &= 15 - 3x_1 - x_2, & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_2} &= 10 - x_1 - x_2, & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_3} &= x_1, & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_4} &= x_2. \end{aligned}$$

Условия Каруша — Куна — Таккера в дифференциальной форме (5.2.3)—(5.2.6) запишутся в виде (5.2.3')—(5.2.6'):

$$\begin{cases} -2(x_1 - 8) - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ -2(x_2 - 8) - y_1 - y_2 + y_4 = 0, \end{cases} \quad (5.2.3')$$

$$\begin{cases} 15 - 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (5.2.4')$$

$$\begin{cases} y_1(15 - 3x_1 - x_2) = 0, \\ y_2(10 - x_1 - x_2) = 0, \\ y_3x_1 = 0, \\ y_4x_2 = 0, \end{cases} \quad (5.2.5')$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ y_3 \geq 0, \\ y_4 \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.6')$$

Если ввести обозначения

$$p_1 = y_1, \quad p_2 = y_2, \quad q_1 = y_3, \quad q_2 = y_4, \quad r_1 = 15 - 3x_1 - x_2, \quad r_2 = 10 - x_1 - x_2,$$

раскрыть скобки и перенести все переменные в левые части ограничений (5.2.3')—(5.2.6'), а все константы — в правые части, то условия Каруша — Куна — Таккера примут следующий вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3p_1 + p_2 - q_1 = 16, \\ 2x_2 + p_1 + p_2 - q_2 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + r_1 = 15, \\ x_1 + x_2 + r_2 = 10, \\ p_1 r_1 = 0, \quad p_2 r_2 = 0, \quad q_1 x_1 = 0, \quad q_2 x_2 = 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \\ q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.10)$$

Решение этой системы, если оно существует, можно найти с помощью **метода искусственного базиса**.

Введем неотрицательные переменные  $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$  и поставим такую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} t = -s_1 - s_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 + 3p_1 + p_2 - q_1 + s_1 = 16, \\ 2x_2 + p_1 + p_2 - q_2 + s_2 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + r_1 = 15, \\ x_1 + x_2 + r_2 = 10, \\ p_1 r_1 = 0, \quad p_2 r_2 = 0, \quad q_1 x_1 = 0, \quad q_2 x_2 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0.$$

Если в оптимальном решении этой задачи  $s_1^* = s_2^* = 0$ , то набор чисел  $x_1^*, x_2^*, p_1^*, p_2^*, q_1^*, q_2^*, r_1^*, r_2^*$  будет удовлетворять условиям Каруша — Куна — Таккера (5.2.10), значит, вектор

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$$

будет являться оптимальным решением задачи (5.2.7)—(5.2.9).

Чтобы решить данную задачу, можно воспользоваться симплексным методом, при этом для учета условий  $p_1 r_1 = 0$ ,  $p_2 r_2 = 0$ ,  $q_1 x_1 = 0$ ,  $q_2 x_2 = 0$  при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные  $p_i$  и  $r_i$  с одним и тем же индексом  $i$  и переменные  $q_j$  и  $x_j$  с одним и тем же индексом  $j$ .

Соответствующая симплексная таблица представлена в табл. 5.2.1.

Таблица 5.2.1

$\tilde{c}$	Базис	h	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	Примечания
			$x_1$	$x_2$	$p_1$	$p_2$	$q_1$	$q_2$	$r_1$	$r_2$	$s_1$	$s_2$	
-1	$s_1$	16	2	0	3	1	-1	0	0	0	1	0	Нельзя вводить в базис $p_1, p_2$ без вывода из базиса $r_1, r_2$ соответственно.
-1	$s_2$	16	0	2	1	1	0	-1	0	0	0	1	
0	$r_1$	15	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	
0	$r_2$	10	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
	$t_0 - t$	$-32 - t$	-2	-2	-4	-2	1	1	0	0	0	0	
-1	$s_1$	6	0	-2/3	3	1	-1	0	-2/3	0	1	0	Нельзя вводить в базис $p_2, q_1$ без вывода из базиса $r_2, x_1$ соответственно.
-1	$s_2$	16	0	2	1	1	0	-1	0	0	0	1	
0	$x_1$	5	1	1/3	0	0	0	0	1/3	0	0	0	
0	$r_2$	5	0	2/3	0	0	0	0	-1/3	1	0	0	
	$t_0 - t$	$-22 - t$	0	-4/3	-4	-2	1	1	2/3	0	0	0	
0	$p_1$	2	0	-2/9	1	1/3	-1/3	0	-2/9	0	1/3	0	Нельзя вводить в базис $p_2, q_1, r_1$ без вывода из базиса $r_2, x_1, p_1$ соответственно.
-1	$s_2$	14	0	20/9	0	2/3	1/3	-1	2/9	0	-1/3	1	
0	$x_1$	5	1	1/3	0	0	0	0	1/3	0	0	0	
0	$r_2$	5	0	2/3	0	0	0	0	-1/3	1	0	0	
	$t_0 - t$	$-14 - t$	0	-20/9	0	-2/3	-1/3	1	-2/9	0	4/3	0	
0	$p_1$	17/5	0	0	1	2/5	-3/10	-1/10	-1/5	0	3/10	1/10	
0	$x_2$	63/10	0	1	0	3/10	3/20	-9/20	1/10	0	-3/20	9/20	
0	$x_1$	29/10	1	0	0	-1/10	-1/20	3/20	3/10	0	1/20	-3/20	
0	$r_2$	4/5	0	0	0	-1/5	-1/10	3/10	-4/10	1	1/10	-3/10	
	$t_0 - t$	$0 - t$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

На первом шаге симплексного метода наименьший из отрицательных оценочных коэффициентов  $\Delta_{p_1} = -4$ , однако переменную  $p_1$  можно ввести в базис только одновременно с выводом из базиса переменной  $r_1$ . Это невозможно, поскольку коэффициент при свободной переменной  $p_1$  в третьем уравнении, соответствующем базисной переменной  $r_1$ , равен нулю и не может быть выбран в качестве разрешающего.

Поэтому на первом шаге в базис вводится переменная  $x_1$  (соответствующий оценочный коэффициент  $\Delta_{x_1} = -2$ ). Итак,  $x_1^* = 29/10 = 2,9$ ,  $x_2^* = 63/10 = 6,3$ ,  $y_1^* = 17/5 = 3,4$ ,  $y_2^* = y_3^* = y_4^* = 0$ .  $\square$

В общем случае система условий Каруша — Куна — Таккера в дифференциальной форме представляет собой систему нелинейных уравнений, отыскание точных решений которой не всегда возможно, следовательно, невозможно найти точные решения задачи выпуклого программирования.

Поэтому для приближенного решения большинства задач выпуклого программирования необходимо использовать **численные методы**. В следующих параграфах мы рассмотрим несколько таких методов.

Существенность условий регулярности иллюстрируется следующим примером.

**ПРИМЕР 5.2.2.** Требуется решить задачу

$$f(x) = x \rightarrow \max,$$

$$x^2 \leq 0.$$

**Решение.** Решение этой задачи очевидно: это точка  $x^* = 0$ . При этом очевидно, что условие регулярности не выполняется, поскольку множество допустимых решений состоит из единственной точки  $x = 0$ .

Составим для этой задачи функцию Лагранжа

$$L(x, y) = x - x^2 y,$$

и попытаемся записать условия Каруша — Куна — Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2xy = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -x^2 \geq 0, \quad y \frac{\partial L}{\partial y} = -x^2 y = 0.$$

Очевидно, данная система противоречива!  $\square$

### § 5.3. МЕТОД ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Основная идея **метода возможных направлений** такова. В качестве начального приближения к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2) выбирается некоторая внутренняя точка  $\mathbf{x}^{(0)}$  множества допустимых решений [т. е. все ограничения (3.1.2) в этой точке должны выполняться как строгие неравенства].

Далее строится последовательность

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + h^{(k)} \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.1)$$

приближений к точке максимума целевой функции  $f(\mathbf{x})$  на множестве допустимых решений.

Вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$ , определяющий направление перемещения из точки  $\mathbf{x}^{(k)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  (на  $k$ -м шаге метода) должен удовлетворять двум **т р е б о в а н и я м**:

- 1) при достаточно малых  $h^{(k)}$  точка  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , определяемая формулой (5.3.1), должна принадлежать множеству допустимых решений (т. е. вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$  должен задавать **в о з м о ж н о е н а п р а в л е н и е**); в

частности, если точка  $\mathbf{x}^{(k)}$  является граничной точкой множества допустимых решений, то вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$  должен быть направлен внутрь этого множества;

- 2) при достаточно малых  $h^{(k)}$  точка  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , определяемая формулой (5.3.1), должна принадлежать множеству допустимых решений [т. е. вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$  должен задавать направление возрастания целевой функции  $f(\mathbf{x})$ ].

Величина  $h^{(k)}$  шага смещения в (5.3.1) выбирается из условия наибольшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$  при перемещении из точки  $\mathbf{x}^{(k)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  с учетом того, что новое приближение  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , определяемое формулой (5.3.1), должно оставаться во множестве допустимых решений.

Если очередное приближение  $\mathbf{x}^{(k)}$  является внутренней точкой множества допустимых решений [т. е. в этой точке все ограничения (3.1.2) выполняются как строгие неравенства], то вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$  можно выбрать совпадающим с градиентом

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)}) = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}$$

целевой функции  $f(\mathbf{x})$  [тогда  $\mathbf{e}^{(k)} = \text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)})$  будет указывать направление наискорейшего возрастания функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$ ].

Если же  $\mathbf{x}^{(k)}$  является граничной точкой множества допустимых решений, то некоторые из неравенств (3.1.2) в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$  обращаются в равенства. В этом случае движение в направлении градиента может вывести за пределы множества допустимых решений.

В этом случае возможное направление

$$\mathbf{e}^{(k)} = \left( \begin{array}{c} e_1^{(k)} \\ e_2^{(k)} \\ \vdots \\ e_n^{(k)} \end{array} \right)$$

возрастания целевой функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$  выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия.

- 1) угол между вектором  $\mathbf{e}^{(k)}$  и вектором  $\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)})$  должен быть как можно меньшим;

- 2) для каждого из ограничений  $i = i_1, i_2, \dots, i_q$ , *активных* в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$  (т. е. обращающихся в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$  в строгие равенства), угол между вектором  $\mathbf{e}^{(k)}$  и внешней нормалью к гиперплоскости

$$\pi_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} x_j = b_i \right\},$$

касательной к границе множества допустимых решений в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$ , должен быть не меньше  $\pi/2$  (т. е. вектор  $\mathbf{e}^{(k)}$  должен быть направлен внутрь множества допустимых решений задачи);

- 3) вектор  $\mathbf{e}^{(1)}$  должен быть ограниченным — поскольку направление определяется с точностью до положительного множителя, данное условие обеспечивает однозначность выбора  $\mathbf{e}^{(1)}$ .

Эти условия приводят к постановке следующей задачи:

$$z = (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{e}^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \rightarrow \max, \quad (5.3.2)$$

$$\begin{cases} (\text{grad } \varphi_i(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{e}^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \leq 0, i = i_1, i_2, \dots, i_q, \\ \sum_{j=1}^n |e_j^{(k)}| \leq 1. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования, для этого нужно представить переменные  $e_j^{(k)}$  (которые по смыслу задачи (5.3.2)—(5.3.3) могут принимать значения произвольного знака) как разности  $e_j^{(k)} = e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}$  новых неотрицательных переменных  $e_{j+}^{(k)} \geq 0, e_{j-}^{(k)} \geq 0$  и добавить условия  $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

При этом

$$|e_1^{(1)}| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)}, \quad |e_2^{(1)}| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (5.3.2)—(5.3.3) примет вид

$$z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}) \rightarrow \max, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}) \leq 0, i = i_1, i_2, \dots, i_q, \\ \sum_{j=1}^n e_{j+}^{(k)} + \sum_{j=1}^n e_{j-}^{(k)} \leq 1, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

$$e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.3.6)$$

$$e_{j+}^{(k)} \geq 0, \quad e_{j-}^{(k)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3.7)$$

Эту задачу после введения фиктивных переменных (для преобразования к предпочитаемому виду) можно решить симплексным методом. При этом для учета условий  $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$  при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные  $e_{j+}^{(1)}$  и  $e_{j-}^{(1)}$  с одинаковым индексом  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

**ПРИМЕР 5.3.1.** Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (3.2.7)—(3.2.9) из примера 3.2.1, для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Как было показано в примере 2.2.1, начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является внутренней точкой множества допустимых решений.

Очередное приближение  $\mathbf{x}^{(1)}$  к оптимальному решению задачи выберем в направлении наискорейшего возрастания целевой функции:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \text{grad } f(\mathbf{x}^{(0)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения  $h$  в направлении  $\mathbf{e}^{(0)}$ , при котором точка

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 14h \\ 8 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Запишем условия допустимости:

$$\begin{cases} 3(1 + 14h) + 8 \leq 15, \\ 1 + 14h + 8 \leq 10, \\ 1 + 14h \geq 0, \\ 8 \geq 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы неравенств являются все  $h \in [-1/14; 1/14]$ . Выберем  $h$  из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)}$  было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\Phi_0(h) = f(\mathbf{x}^{(0)} + h\mathbf{e}^{(0)}) = -(1 + 14h - 8)^2 - (8 - 8)^2 = -(14h - 7)^2 = -49(2h - 1)^2$$

одной переменной  $h$  на отрезке  $h \in [-1/14; 1/14]$ .

Производная  $\Phi'_0(h) = -49 \cdot 2(2h - 1) = -98(2h - 1)$  обращается в нуль в точке  $h = 1/2$ , положительна при  $h < 1/2$  и отрицательна при  $h > 1/2$ , поэтому точка  $h = 1/2$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_0(h)$ , а максимум функции  $\Phi_0(h)$  на отрезке  $h \in [-1/14; 1/14]$  достигается в точке  $h^{(0)} = 1/14$ .

Таким образом, если выбрать шаг смещения  $h^{(0)} = 1/14$  в направлении

$$\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$ , то при движении от точки

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h^{(0)}\mathbf{e}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 + 14h^{(0)} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка  $\mathbf{x}^{(1)}$  останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили новое приближение

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (3.2.7)—(3.2.9).

Переходим ко второму шагу метода возможных направлений.

Точка  $\mathbf{x}^{(1)}$  является граничной точкой множества допустимых решений; второе из ограничений (3.2.8) выполняется в этой точке как равенство, а первое ограничение (3.2.8) и оба ограничения (3.2.9) — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 8 < 15, \\ 2 + 8 = 10, \\ 2 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(1)}) = \left( \begin{array}{c} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}} = \left( \begin{array}{c} -2(2 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 12 \\ 0 \end{array} \right)$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, т. е. направление

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(1)}) = \left( \begin{array}{c} 12 \\ 0 \end{array} \right)$$

не является возможным в точке

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left( \begin{array}{c} 2 \\ 8 \end{array} \right).$$

Возможное направление

$$\mathbf{e}^{(1)} = \left( \begin{array}{c} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{array} \right)$$

возрастания целевой функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(1)}$  выберем так, чтобы оно являлось оптимальным решением задачи (5.3.2)—(5.3.3), которая в данном случае имеет вид

$$z = 12e_1^{(1)} + 0e_2^{(1)} \rightarrow \max, \quad (5.3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1^{(1)} + e_2^{(1)} \leq 0, \\ |e_1^{(1)}| + |e_2^{(1)}| \leq 1. \end{array} \right. \quad (5.3.9)$$

Чтобы свести эту задачу к задаче линейного программирования, представим переменные  $e_1^{(1)}$  и  $e_2^{(1)}$  как разности новых неотрицательных переменных  $e_{1+}^{(1)} \geq 0$ ,  $e_{1-}^{(1)} \geq 0$ ,  $e_{2+}^{(1)} \geq 0$ ,  $e_{2-}^{(1)} \geq 0$ :

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)}, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)},$$

причем

$$e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0.$$

При этом

$$|e_1^{(1)}| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)}, \quad |e_2^{(1)}| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (5.3.8)—(5.3.9) примет вид

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} & \leq 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} & \leq 1, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0,$$

$$e_{1+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(1)} \geq 0.$$

Будем решать эту задачу симплексным методом, введя предварительно дополнительные переменные  $s_1$  и  $s_2$ , чтобы преобразовать неравенства в равенства:

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \rightarrow \max, \quad (5.3.10)$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} + s_1 & = 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} + s_2 & = 1, \\ e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} & = 0, \\ e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} & = 0, \end{cases} \quad (5.3.11)$$

$$e_{1+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(1)} \geq 0. \quad (5.3.12)$$

Для учета условий  $e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0$ ,  $e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0$  при вычислительной реализации симплексного метода будем следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные  $e_{j+}^{(1)}$  и  $e_{j-}^{(1)}$  ( $j = 1, 2$ ).

Симплексная таблица представлена в табл. 5.3.1.

Таблица 5.3.1

$\tilde{c}$	Базис	$h$	12	-12	0	0	0	0
			$e_{1+}^{(1)}$	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	$s_1$	$s_2$
0	$s_1$	0	1	-1	1	-1	1	0
0	$s_2$	1	1	1	1	1	1	0
	$z_0 - z$	$0 - z$	-12	12	0	0	0	0
12	$e_{1+}^{(1)}$	0	1	-1	1	-1	1	0
0	$s_2$	1	0	2	0	2	-1	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	12	-12	12	0
12	$e_{1+}^{(1)}$	1/2	1	0	1	0	1/2	1/2
0	$e_{2-}^{(1)}$	1/2	0	1	0	1	-1/2	1/2
	$z_0 - z$	$6 - z$	0	24	12	0	6	6

В результате мы получили оптимальное решение

$$e_{1+}^{(1)} = 1/2, \quad e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} = 0, \quad e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

задачи (5.3.10)—(5.3.12).

Теперь легко найти оптимальное решение задачи (5.3.8)—(5.3.9):

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} = 1/2, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} = -1/2.$$

Тем самым, мы определили направление очередного шага:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения  $h$  в направлении  $\mathbf{e}^{(1)}$ , при котором точка

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + h/2 \\ 8 - h/2 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(2 + h/2) + 8 - h/2 \leq 15, \\ 2 + h/2 + 8 - h/2 \leq 10, \\ 2 + h/2 \geq 0, \\ 8 - h/2 \geq 0. \end{cases}$$

Точка  $\mathbf{x}^{(2)}$  остается во множестве допустимых решений при всех  $h \in [-4; 1]$ . Выберем  $h$  из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(2)}$  было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(h) &= f(\mathbf{x}^{(1)} + h\mathbf{e}^{(1)}) = -(2 + h/2 - 8)^2 - (8 - h/2 - 8)^2 = \\ &= -(h/2 - 6)^2 - h^2/4 = -h^2/2 + 6h - 36 \end{aligned}$$

одной переменной  $h$  на отрезке  $h \in [-4; 1]$ .

Производная  $\Phi_1'(h) = -h + 6$  обращается в нуль в точке  $h = 6$ , положительна при  $h < 6$  и отрицательна при  $h > 6$ , поэтому точка  $h = 6$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_1(h)$ , а максимум функции  $\Phi_1(h)$  на отрезке  $h \in [-4; 1]$  достигается в точке  $h^{(1)} = 1$ .

Таким образом, если выбрать шаг смещения  $h^{(1)} = 1$  в направлении

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$ , то при движении от точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 + h^{(1)} / 2 \\ 8 - h^{(1)} / 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка  $\mathbf{x}^{(2)}$  останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили очередное приближение

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (3.2.7)—(3.2.9).

Начинаем третий шаг метода возможных направлений.

Точка  $\mathbf{x}^{(2)}$  является граничной точкой множества допустимых решений; оба ограничения (3.2.8) выполняются в этой точке как равенства, а оба ограничения (3.2.9) — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5/2 + 15/2 = 15, \\ 5/2 + 15/2 = 10, \\ 5/2 > 0, \\ 15/2 > 0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(2)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, т. е. направление

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не является возможным в точке

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования для определения возможного направления  $\mathbf{e}^{(2)}$ :

$$z = 11e_{1+}^{(2)} - 11e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3e_{1+}^{(2)} - 3e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leq 0, \\ e_{1+}^{(2)} - e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leq 0, \\ e_{1+}^{(2)} + e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} + e_{2-}^{(2)} \leq 1, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(2)}e_{1-}^{(2)} = 0, \quad e_{2+}^{(2)}e_{2-}^{(2)} = 0,$$

$$e_{1+}^{(2)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(2)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(2)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(2)} \geq 0.$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$e_{1+}^{(2)} = 1/4, \quad e_{1-}^{(2)} = 0, \quad e_{2+}^{(2)} = 0, \quad e_{2-}^{(2)} = 3/4$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.3.2), откуда находим направление очередного шага

$$\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения  $h$  в направлении  $\mathbf{e}^{(2)}$ , при котором точка

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + h/4 \\ 15/2 - 3h/4 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(5/2 + h/4) + 15/2 - 3h/4 \leq 15, \\ 5/2 + h/4 + 15/2 - 3h/4 \leq 10, \\ 5/2 + h/4 \geq 0, \\ 15/2 - 3h/4 \geq 0. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяют все  $h \in [0; 5]$ . Выберем  $h$  из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)}$  было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\begin{aligned}\Phi_2(h) &= f(\mathbf{x}^{(2)} + h\mathbf{e}^{(2)}) = -(5/2 + h/4 - 8)^2 - (15/2 - 3h/4 - 8)^2 = \\ &= -(h/4 - 11/2)^2 - (3h/4 + 1/2)^2\end{aligned}$$

одной переменной  $h$  на отрезке  $h \in [0; 10]$ .

Производная  $\Phi'_2(h) = (8 - 5h)/4$  обращается в нуль в точке  $h = 8/5$ , положительна при  $h < 8/5$  и отрицательна при  $h > 8/5$ , поэтому точка  $h = 8/5$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_2(h)$  и точкой локального максимума этой функции на отрезке  $h \in [0; 10]$ .

Получаем очередное приближение:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/2 + 2/5 \\ 15/2 - 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,9 \\ 6,3 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс метода возможных направлений иллюстрируется рис. 5.3.1.

Заметим, что  $\mathbf{x}^{(3)}$  — это точное решение задачи (3.2.7)—(3.2.9); оно было получено в примере 2.2.1.  $\square$

Таблица 5.3.2

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	11	-11	1	-1	0	0	0
			$e_{1+}^{(1)}$	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
0	$s_1$	0	3	-3	1	-1	1	0	0
0	$s_2$	0	1	-1	1	-1	0	1	0
0	$s_3$	1	1	1	1	1	0	0	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	-11	11	-1	1	0	0	0
0	$s_1$	0	0	0	-2	2	1	-3	0
11	$e_{1+}^{(1)}$	0	1	-1	1	-1	0	1	0
0	$s_3$	1	0	2	0	2	0	-1	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	10	-10	0	11	0
-1	$e_{2-}^{(1)}$	0	0	0	-1	1	1/2	-3/2	0
11	$e_{1+}^{(1)}$	0	1	-1	0	0	1/2	-1/2	0
0	$s_3$	1	0	2	2	0	-1	2	1
	$z_0 - z$	$0 - z$	0	0	0	0	5	-4	0
-1	$e_{2-}^{(1)}$	3/4	0	3/2	1/2	1	-1/4	0	3/4
11	$e_{1+}^{(1)}$	1/4	1	-1/2	1/2	0	1/4	0	1/4
0	$s_2$	1/2	0	1	1	0	-1/2	1	1/2
	$z_0 - z$	$2 - z$	0	4	4	0	3	0	2

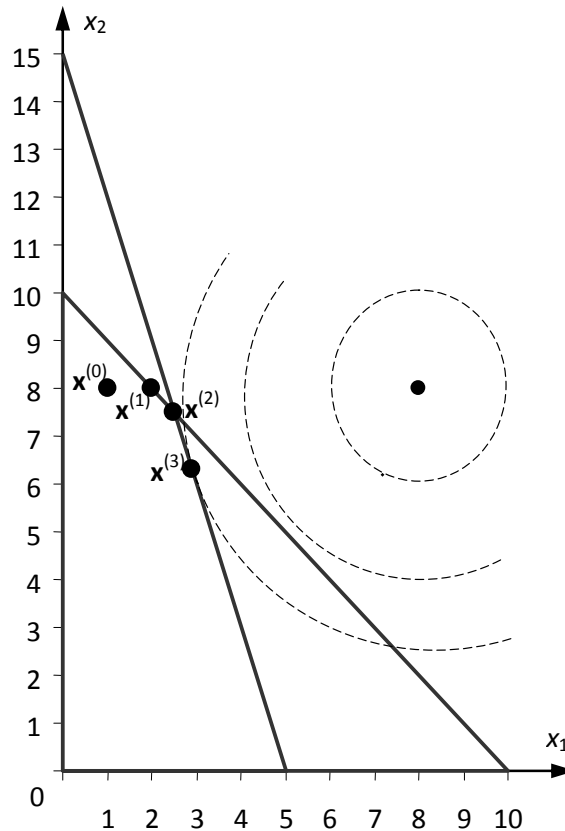


Рис. 5.3.1. Итерационный процесс метода возможных направлений

## § 5.4. МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Опишем теперь **метод условного градиента**. Пусть  $\mathbf{x}^{(k)}$  — очередное приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (3.1.1)—(3.1.2) — такая точка  $\mathbf{x}^{(k)}$  множества допустимых решений, что

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)}) \neq \mathbf{0}.$$

Тогда в окрестности точки  $\mathbf{x}^{(k)}$  целевая функция  $f(\mathbf{x})$  может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|).$$

Будем максимизировать на допустимом множестве линейную функцию

$$f^{(k)}(\mathbf{x}) = (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}), \quad (5.4.1)$$

которая является приближением разности  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(k)})$  с точностью до величины  $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|)$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$  — решение вспомогательной задачи максимизации функции (5.4.1) при ограничениях (3.1.2).

Следующее приближение  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  к оптимальному решению исходной задачи (3.1.1)—(3.1.2) построим по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + h^{(k)} (\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}), \quad (5.4.2)$$

в которой величину шага смещения  $h^{(k)}$  выберем как

$$h^{(k)} = \min\{1; \tilde{h}^{(k)}\},$$

где  $\tilde{h}^{(k)}$  выбирается из условия наибольшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$  при перемещении из точки  $\mathbf{x}^{(k)}$  в точку

$$\mathbf{x}^{(k)} + \tilde{h}^{(k)} (\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

Тогда, поскольку множество допустимых решений выпукло, а  $h^{(k)} \in [0; 1]$ , точка  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  (5.4.2) останется допустимым решением.

Отметим, что вспомогательная задача максимизации функции (5.4.1) при ограничениях (3.1.2) является также задачей выпуклого программирования. Процесс ее решение оказывается, однако, достаточно простым в случае, когда ограничения (3.1.2) являются линейными.

**ПРИМЕР 5.4.3.** Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (3.2.7)—(3.2.9) из примера 3.2.1, для чего провести три первые итерации метода условного градиента, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Как было показано в примере 2.2.1, начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является допустимым решением. При этом

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(0)}) = \left( \begin{matrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{matrix} \right) \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (5.4.1) при ограничениях (3.1.2):

$$\begin{aligned} f^{(0)}(\mathbf{x}) &= (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = 14(x_1 - 1) + 0(x_2 - 8) = 14x_1 - 14 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.4.1).

Таблица 5.4.1

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	14	0	0	0
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	15	3	1	1	0
0	$x_4$	10	1	1	0	1
	$f_0^{(0)} - f^{(0)}$	$0 - f^{(0)}$	-14	0	0	0
14	$x_1$	5	1	1/3	1/3	0
0	$x_4$	5	0	2/3	-1/3	1
	$f_0^{(0)} - f^{(0)}$	$70 - f^{(0)}$	0	14/3	14/3	0

Выберем  $\tilde{h}^{(0)}$  из условия наибольшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$  при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} (\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(0)} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\tilde{h}^{(0)} \\ 8-8\tilde{h}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_0(h) &= f \begin{pmatrix} 1+4h \\ 8-8h \end{pmatrix} = -(1+4h-8)^2 - (8-8h-8)^2 = \\ &= -16h^2 + 56h - 49 - 64h^2 = -80h^2 + 56h - 49. \end{aligned}$$

Производная

$$\Phi'_0(h) = -160h + 56$$

обращается в нуль в точке  $h = 56/160 = 7/20$ , положительна при  $h < 7/20$  и отрицательна при  $h > 7/20$ , поэтому точка  $\tilde{h}^{(0)} = 7/20$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_0(h)$ .

Величину шага смещения  $h^{(0)}$  выберем как

$$h^{(k)} = \min \{1; \tilde{h}^{(k)}\} = \min \{1; 7/20\} = 7/20$$

и построим следующее приближение  $\mathbf{x}^{(1)}$  к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h^{(0)} (\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{7}{20} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \cdot 7/20 \\ 8-8 \cdot 7/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(12/5 - 8) \\ -2(26/5 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (5.4.1) при ограничениях (3.1.2):

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mathbf{x}) &= (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(1)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}) = \\ &= \frac{56}{5} \left( x_1 - \frac{12}{5} \right) + \frac{28}{5} \left( x_2 - \frac{26}{5} \right) = \frac{56}{5} x_1 + \frac{28}{5} x_2 - 56 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.4.2).

Таблица 5.4.2

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	56/5	28/5	0	0
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	15	3	1	1	0
0	$x_4$	10	1	1	0	1
	$f_0^{(1)} - f^{(1)}$	$0 - f^{(1)}$	-56/5	-28/5	0	0
56/5	$x_1$	5	1	1/3	1/3	0
0	$x_4$	5	0	2/3	-1/3	1
	$f_0^{(1)} - f^{(1)}$	$0 - f^{(1)}$	0	-28/15	56/15	0
56/5	$x_1$	5/2	1	0	1/2	-1/2
28/5	$x_2$	15/2	0	1	-1/2	3/2
	$f_0^{(1)} - f^{(1)}$	$70 - f^{(1)}$	0	0	14/5	14/5

Выберем  $\tilde{h}^{(1)}$  из условия наибольшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$  при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(1)} + \tilde{h}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(1)} \begin{pmatrix} 5/2 - 12/5 \\ 15/2 - 26/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 + \tilde{h}^{(1)}/10 \\ 26/5 + 23\tilde{h}^{(1)}/10 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_1(h) &= f \left( \begin{pmatrix} 12/5 + h/10 \\ 26/5 + 23h/10 \end{pmatrix} \right) = -(12/5 + h/10 - 8)^2 - (26/5 + 23h/10 - 8)^2 = \\ &= -\left( \frac{h}{10} - \frac{28}{5} \right)^2 - \left( \frac{23h}{10} - \frac{14}{5} \right)^2. \end{aligned}$$

Производная

$$\Phi_1'(h) = -2 \left( \frac{h}{10} - \frac{28}{5} \right) \frac{1}{10} - 2 \left( \frac{23h}{10} - \frac{14}{5} \right) \frac{23}{10} = -\frac{1}{5}(53h - 70)$$

обращается в нуль в точке  $h = 70/53$ , положительна при  $h < 70/53$  и отрицательна при  $h > 70/53$ , поэтому точка  $\tilde{h}^{(1)} = 70/53$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_1(h)$ .

Величину шага смещения  $h^{(1)}$  выберем как

$$h^{(1)} = \min\{1; \tilde{h}^{(1)}\} = \min\{1; 70/53\} = 1$$

и построим следующее приближение  $\mathbf{x}^{(1)}$  к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + h^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(1)} + \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (5.4.1) при ограничениях (3.1.2):

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\mathbf{x}) &= (\text{grad } f(\mathbf{x}^{(2)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}) = 11(x_1 - 5/2) + x_2 - 15/2 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оптимальное решение этой задачи равно

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(симплексная таблица представлена в табл. 5.4.3).

Таблица 5.4.3

$\tilde{\mathbf{c}}$	Базис	$\mathbf{h}$	11	1	0	0
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	15	3	1	1	0
0	$x_4$	10	1	1	0	1
	$f_0^{(2)} - f^{(2)}$	$0 - f^{(2)}$	-11	-1	0	0
11	$x_1$	5	1	1/3	1/3	0
0	$x_4$	5	0	2/3	-1/3	1
	$f_0^{(2)} - f^{(2)}$	$55 - f^{(2)}$	0	8/3	11/3	0

Выберем  $\tilde{h}^{(2)}$  из условия наибольшего роста целевой функции  $f(\mathbf{x})$  при перемещении из точки

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

в точку

$$\mathbf{x}^{(2)} + \tilde{h}^{(2)} (\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} - \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(2)} \begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + 5\tilde{h}^{(2)}/2 \\ 15/2 - 15\tilde{h}^{(2)}/2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_2(h) &= f \begin{pmatrix} 5/2 + 5h/2 \\ 15/2 - 15h/2 \end{pmatrix} = -(5/2 + 5h/2 - 8)^2 - (15/2 - 15h/2 - 8)^2 = \\ &= -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(-\frac{15h}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Производная

$$\Phi_2'(h) = -2\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)\frac{5}{2} - 2\left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{15}{2} = -\frac{5}{2}(50h - 8) = -5(25h - 4)$$

обращается в нуль в точке  $h = 4/25$ , положительна при  $h < 4/25$  и отрицательна при  $h > 4/25$ , поэтому точка  $\tilde{h}^{(2)} = 4/25$  является точкой глобального максимума функции  $\Phi_2(h)$ .

Величина шага смещения

$$h^{(2)} = \min\{1; \tilde{h}^{(2)}\} = \min\{1; 4/25\} = 4/25$$

и построим следующее приближение к оптимальному решению исходной задачи:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + h^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} - \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,9 \\ 6,3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## § 5.5. МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Перейдем к рассмотрению **метода штрафных функций**, идея которого состоит в переходе от задачи условной максимизации функции (3.1.1) при ограничениях (3.1.2) к последовательности задач безусловной максимизации

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \psi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.5.1)$$

где функции  $\psi_k(\mathbf{x})$  с ростом  $k$  все в большей степени учитывают ограничения (3.1.2). Для этого функции  $\psi_k(\mathbf{x})$  подбираются так, чтобы  $f_k(\mathbf{x})$  при больших  $k$  мало отличались от  $f(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих ограничениям (3.1.2), и быстро убывали при удалении  $\mathbf{x}$  от множества допустимых решений. Более строго, последовательность функций  $\{\psi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$  называется *последовательностью штрафных функций* для задачи (3.1.1)—(3.1.2), если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ -\infty, & \text{если хотя бы одно из неравенств } \varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i \text{ нарушается.} \end{cases}$$

Такую последовательность штрафных функций можно определить, например, так:

$$\psi_k(\mathbf{x}) = k\psi(\mathbf{x}),$$

где

$$\psi(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^m (g_i^+(\mathbf{x}))^2,$$

$$g_i^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \\ \varphi_i(\mathbf{x}) - b_i, & \text{если } \varphi_i(\mathbf{x}) > b_i. \end{cases}$$

При этом последовательность решений задач безусловной максимизации (5.5.1) сходится (при определенных условиях) к решению исходной задачи (3.1.1)—(3.1.2), поэтому в качестве приближенного решения задачи (3.1.1)—(3.1.2) полагают очередное решение задачи (5.5.1) при достаточно большом  $k$ :  $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ .

Если целевая функция задачи выпуклого программирования является квадратичной, а ограничения — линейными, то решение вспомогательной задачи можно найти точно, после чего для определения оптимального решения исходной задачи перейти к пределу при  $k \rightarrow \infty$ .

**ПРИМЕР 5.5.4.** Требуется найти оптимальное решение задачи выпуклого программирования (3.2.7)—(3.2.9) из примера 3.2.1 с помощью метода штрафных функций.

**Решение.** Предположим, что в точке  $\mathbf{x}^{(k)}$  максимума вспомогательной функции

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \psi_k(\mathbf{x})$$

все ограничения исходной задачи (3.2.8)—(3.2.9), которые мы представим в форме

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 15, \\ x_1 + x_2 &\leq 10, \\ -x_1 &\leq 0, \\ -x_2 &\leq 0, \end{aligned}$$

нарушаются, т. е.

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15, \\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 10, \\ -x_1^{(k)} &> 0, \\ -x_2^{(k)} &> 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_k(\mathbf{x}) &= -k \left( (3x_1 + x_2 - 15)^2 + (x_1 + x_2 - 10)^2 + (-x_1 - 0)^2 + (-x_2 - 0)^2 \right) = \\ &= -k \left( (3x_1 + x_2 - 15)^2 + (x_1 + x_2 - 10)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 \right), \\ f_k(\mathbf{x}) &= -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 - \\ &\quad -k \left( (3x_1 + x_2 - 15)^2 + (x_1 + x_2 - 10)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 \right), \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} &= -2(x_1 - 8) - 6k(3x_1 + x_2 - 15) - 2k(x_1 + x_2 - 10) - 2kx_1 = \\ &= -(22k + 2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16, \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2} &= -2(x_2 - 8) - 2k(3x_1 + x_2 - 15) - 2k(x_1 + x_2 - 10) - 2kx_2 = \\ &= -8kx_1 - (6k + 2)x_2 + 50k + 16. \end{aligned}$$

В точке максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  частные производные по  $x_1$  и  $x_2$  должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(22k + 2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16 = 0, \\ -8kx_1 - (6k + 2)x_2 + 50k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (11k + 1)x_1 + 4kx_2 = 55k + 8, \\ 4kx_1 + (3k + 1)x_2 = 25k + 8. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{55k + 8 - (11k + 1)x_1}{4k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$4kx_1 + (3k + 1)\frac{55k + 8 - (11k + 1)x_1}{4k} = 25k + 8.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{65k^2 + 47k + 8}{17k^2 + 14k + 1} > 0, \quad x_2^{(k)} = \frac{55k^2 + 81k + 8}{17k^2 + 14k + 1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = -\frac{5k^2 - 12k - 17}{17k^2 + 14k + 1}, \quad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = -\frac{50k^2 - 268k - 36}{17k^2 + 14k + 1}.$$

Поскольку при любом  $k$   $x_1^{(k)} > 0$ ,  $x_2^{(k)} > 0$ , наше предположение о том, что все ограничения исходной задачи нарушаются, неверно.

Выдвинем другую гипотезу. Предположим, что в точке максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  выполняются третье и четвертое ограничения исходной задачи (3.2.8)—(3.2.9), а первое и второе ограничения не выполняются, т. е.

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} > 15,$$

$$x_1^{(k)} + x_2^{(k)} > 10,$$

$$-x_1^{(k)} \leq 0,$$

$$-x_2^{(k)} \leq 0.$$

Тогда

$$\psi_k(\mathbf{x}) = -k(3x_1 + x_2 - 15)^2 - k(x_1 + x_2 - 10)^2,$$

$$f_k(\mathbf{x}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 - k(3x_1 + x_2 - 15)^2 - k(x_1 + x_2 - 10)^2,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2(x_1 - 8) - 6k(3x_1 + x_2 - 15) - 2k(x_1 + x_2 - 10) =$$

$$= -(20k + 2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_2} = -2(x_2 - 8) - 2k(3x_1 + x_2 - 15) - 2k(x_1 + x_2 - 10) =$$

$$= -8kx_1 - (4k + 2)x_2 + 50k + 16.$$

В точке максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  частные производные по  $x_1$  и  $x_2$  должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(20k+2)x_1 - 8kx_2 + 110k + 16 = 0, \\ -8kx_1 - (4k+2)x_2 + 50k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (10k+1)x_1 + 4kx_2 = 55k+8, \\ 4kx_1 + (2k+1)x_2 = 25k+8. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{55k+8 - (10k+1)x_1}{4k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$4kx_1 + (2k+1) \frac{55k+8 - (10k+1)x_1}{4k} = 25k+8.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{10k^2 + 39k + 8}{4k^2 + 12k + 1} > 0, \quad x_2^{(k)} = \frac{30k^2 + 73k + 8}{4k^2 + 12k + 1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = \frac{10k+17}{4k^2+12k+1} > 0, \quad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = \frac{-8k+6}{4k^2+12k+1}.$$

Поскольку при любом  $k$   $x_1^{(k)} + x_2^{(k)} < 10$ , наше предположение о том, что второе ограничение исходной задачи нарушаются, неверно.

Рассмотрим третью гипотезу относительно местоположения точки максимума. Предположим, что в точке максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  выполняются все ограничения исходной задачи (32.8)—(3.2.9), кроме первого, т. е.

$$\begin{aligned} 3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &> 15, \\ x_1^{(k)} + x_2^{(k)} &\leq 10, \\ -x_1^{(k)} &\leq 0, \\ -x_2^{(k)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\psi_k(\mathbf{x}) = -k(3x_1 + x_2 - 15)^2,$$

$$f_k(\mathbf{x}) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 - k(3x_1 + x_2 - 15)^2,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = -2(x_1 - 8) - 6k(3x_1 + x_2 - 15) = -(18k + 2)x_1 - 6kx_2 + 90k + 16,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_2} = -2(x_2 - 8) - 2k(3x_1 + x_2 - 15) = -6kx_1 - (2k + 2)x_2 + 30k + 16.$$

В точке максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  частные производные по  $x_1$  и  $x_2$  должны быть равны нулю, откуда

$$\begin{cases} -(18k + 2)x_1 - 6kx_2 + 90k + 16 = 0, \\ -6kx_1 - (2k + 2)x_2 + 30k + 16 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (9k + 1)x_1 + 3kx_2 = 45k + 8, \\ 3kx_1 + (k + 1)x_2 = 15k + 8. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения

$$x_2 = \frac{45k + 8 - (9k + 1)x_1}{3k}$$

и подставим во второе уравнение:

$$3kx_1 + (k + 1)\frac{45k + 8 - (9k + 1)x_1}{3k} = 15k + 8.$$

Отсюда

$$x_1^{(k)} = \frac{29k + 8}{10k + 1} > 0, \quad x_2^{(k)} = \frac{63k + 8}{10k + 1} > 0.$$

При этом

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 15 = \frac{17}{10k + 1} > 0, \quad x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 10 = \frac{-8k + 6}{10k + 1} < 0,$$

Значит, наше предположение о том, что

$$3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} > 15,$$

$$x_1^{(k)} + x_2^{(k)} \leq 10,$$

$$-x_1^{(k)} \leq 0,$$

$$-x_2^{(k)} \leq 0,$$

оказалось верным, и это означает, что точка безусловного максимума функции  $f_k(\mathbf{x})$  равна

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} (29k + 8)/(10k + 1) \\ (63k + 8)/(10k + 1) \end{pmatrix}.$$


Поэтому оптимальное решение исходной задачи определим как

$$\mathbf{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} ((29k + 8)/(10k + 1)) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} ((63k + 8)/(10k + 1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,9 \\ 6,3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## § 5.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПАКЕТЕ MICROSOFT EXCEL

Пакет Microsoft Excel предоставляет средства для решения задач нелинейного программирования в надстройке «Поиск решения», работу с которой опишем в следующем примере.

**ПРИМЕР 5.6.5.** Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (3.2.7)—(3.2.9) из примера 3.2.1 с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.

**Решение.** Введем в рабочий лист Microsoft Excel формулы, как показано на рис. 5.6.2, а, б. Ячейки B1 и B2 отведем под координаты вектора оптимального решения задачи. Запустим надстройку «Поиск решения». Для этого на вкладке «Данные» нужно нажать кнопку « Поиск решения». (Если такая кнопка на вкладке «Данные» отсутствует, нужно выбрать пункт меню «Файл | Параметры», в появившемся диалоговом окне «Параметры Excel» выбрать пункт «Надстройки», далее в выпадающем списке «Управление» выбрать элемент «Надстройки Excel», нажать кнопку «Перейти», и во вновь открывшемся диалоговом окне «Надстройки» отметить в качестве доступной надстройку «Поиск решения».)

В появившемся окне ввода данных (рис. 5.6.3) укажем ячейку \$B\$3, в которую введена целевая функция, отметим, что требуется искать максимум этой функции, изменяя значения переменных  $x_1$  и  $x_2$  (под которые отведены ячейки \$B\$1:\$B\$2) при наличии ограничений  $\mathbf{f} \leq \mathbf{b}$  (\$B\$4:\$B\$5 <= \$B\$6:\$B\$7). Отметим также пункт «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» в соответствии с ограничениями  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

В качестве метода решения выберем «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ» — нелинейный метод обобщенного понижающего градиента, который наилучшим образом подходит для решения гладких нелинейных задач условной оптимизации. (Для решения негладких нелинейных задач лучше подходит метод эволюционного поиска решения, а для решения задач линейного программирования целесообразнее выбрать симплекс-метод — эти методы также доступны в надстройке «Поиск решения».)

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	$= -((B1-8)^2 + (B2-8)^2)$
4	$\Phi_1(x_1, x_2) =$	$= 3 * B1 + B2$
5	$\Phi_2(x_1, x_2) =$	$= B1 + B2$
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

а) формулы Microsoft Excel

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	0
4	$\Phi_1(x_1, x_2) =$	0
5	$\Phi_2(x_1, x_2) =$	0
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

б) результат ввода формул

**Рис. 5.6.2.** Исходные данные для решения задачи выпуклого программирования с помощью надстройки «Поиск решения»

**Рис. 5.6.3.** Ввод данных в надстройку «Поиск решения»

Результаты работы надстройки «Поиск решения» представлены на рис. 5.6.4 — замечаем, что найдено точное решение. Кроме оптимальных значений переменных и максимального значения целевой функции, надстройка «Поиск решения» позволяет получить также отчеты по результатам, устойчивости и пределам (рис. 5.6.5). Предлагаем студенту интерпретировать эти отчеты самостоятельно. □

## Microsoft Excel. Отчет о результатах

**Результат:** Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

### Модуль поиска решения

Модуль: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ

Время решения: 0,01 секунд.

Число итераций: 3 Число подзадач: 0

### Параметры поиска решения

Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001

Сходимость 0,0001, Размер совокупности 100, Случайное начальное значение 0, Центральные производные

Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов,

Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
\$B\$3	$f(x_1, x_2) =$	-128	-28,9

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$1	$x_1 =$	0	2,9	Продолжить
\$B\$2	$x_2 =$	0	6,3	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
\$B\$4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15	$\$B\$4 \leq \$B\$6$	Привязка	0
\$B\$5	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	9,2	$\$B\$5 \leq \$B\$7$	Без привязки	0,8

## б) отчет о результатах

### Microsoft Excel. Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное значение	Приведенный градиент
\$B\$1	$x_1 =$	2,9	0
\$B\$2	$x_2 =$	6,3	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное значение	Лагранжа множитель
\$B\$4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15	3,4
\$B\$5	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	9,2	0

## в) отчет об устойчивости

### Microsoft Excel. Отчет о пределах

Целевая функция						
Ячейка	Имя	Значение				
\$B\$3	$f(x_1, x_2) =$	-28,9				
Переменная			Нижний предел	Целевая функция Результат	Верхний предел	Целевая функция Результат
Ячейка	Имя	Значение				
\$B\$1	$x_1 =$	2,9	0	-66,89	2,9	-28,9
\$B\$2	$x_2 =$	6,3	0	-90,01	6,3	-28,9

## г) отчет о пределах

**Рис. 5.6.5.** Отчеты о результатах, устойчивости и пределах, полученные с помощью надстройки «Поиск решения»

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Решите данные задачи выпуклого программирования графическим методом, а также путем использования условий Каруша — Куна — Таккера:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} -(x_1 - 4)^2 - (x_2 + 16)^2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 7, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases} \end{array} \quad \text{б)}$$

2. Решите данные задачи выпуклого программирования графическим методом, а затем проведите три первые итерации метода возможных направлений:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} -(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array} \quad \text{б)}$$

3. Решите данные задачи выпуклого программирования графическим методом, а затем сделайте три первых шага метода условного градиента:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 x_2 \geq 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array} \quad \text{б)}$$

4. Решите данные задачи выпуклого программирования с помощью метода штрафных функций:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 3 \rightarrow \min, \\ (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0; \end{array} \\ \text{б)} \quad \begin{array}{l} -x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 9 \rightarrow \max, \\ x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0; \end{array} \\ \text{в)} \quad \begin{array}{l} 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 22 \rightarrow \min, \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 1 \leq 0. \end{array} \end{array}$$

## ГЛАВА 6. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗУЧЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

### § 6.1. БЮДЖЕТНОЕ МНОЖЕСТВО И ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Рассмотрим рынок, на котором продаются товары  $n$  видов. Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — цены этих товаров, вектор

$$\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n)$$

естественно назвать *вектором цен*.

Пусть некоторый потребитель обладает богатством  $I$  ден. ед., и  $x_i$  — это количество единиц  $i$ -го товара, которые данный потребитель приобретает на рынке ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n,$$

координаты которого неотрицательны и соответствуют приобретаемым количествам товаров каждого вида, называется *набором товаров*, а множество всех наборов товаров

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_+^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0 \right\}$$

называется *пространством товаров* (поскольку на наборы товаров не налагается ограничений целочисленности, здесь предполагается, что можно приобрести произвольное — целое или дробное — количество любого товара, т. е. что все товары являются *безгранично делимыми*).

Стоимость набора товаров  $\mathbf{x}$  равна, очевидно,

$$\mathbf{p}\mathbf{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n.$$

*Бюджетное множество*  $\mathcal{B}$  — это множество наборов товаров  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , которые может себе позволить приобрести при данных ценах  $p_1, p_2, \dots, p_n$  потребитель, обладающий богатством  $I$  (при этом предполагается, что тратить все деньги необязательно).

С алгебраической точки зрения бюджетное множество описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq I, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

поэтому, очевидно, бюджетное множество является выпуклым, ограниченным и замкнутым. Кроме того, очевидно, что если одновременно в  $k$  раз вырастают цены всех товаров и богатство потребителя, то бюджетное множество остается прежним:

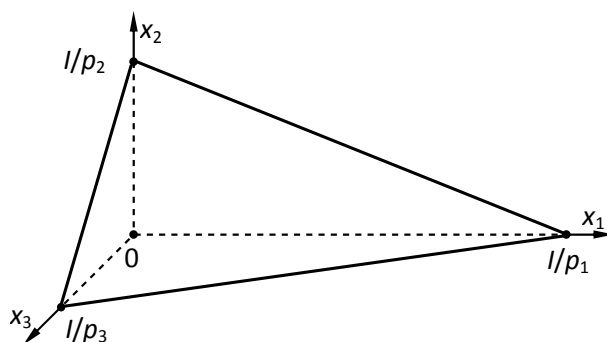
$$\begin{cases} kp_1x_1 + kp_2x_2 + \dots + kp_nx_n \leq kI, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq I, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

**ПРИМЕР 6.1.1.** В пространстве трех товаров известен вектор цен  $\mathbf{p} = (2 \ 5 \ 6)$ , богатство потребителя  $I = 30$  ден. ед. Требуется описать бюджетное множество с помощью системы неравенств и изобразить его графически.

**Решение.** В соответствии с (3.1.1) бюджетное множество имеет вид

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \right\}$$

и представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках  $I/p_1 = 30/2 = 15$ ,  $I/p_2 = 30/5 = 6$  и  $I/p_3 = 30/6 = 5$  на осях  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ , и  $Ox_3$  (рис. 6.1.1).  $\square$



**Рис. 6.1.1.** Бюджетное множество

## § 6.2. ПРЕДПОЧТЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ И ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Потребитель различает наборы товаров: один набор товаров он может считать для себя более предпочтительным, чем другой, два каких-то других набора товаров он может считать равноценными. Запись  $x \succsim y$  означает, что потребитель считает набор товаров  $x$  не хуже набора товаров  $y$ .

В качестве **первой аксиомы потребителя** примем, что относительно любых двух наборов товаров  $x, y \in C$  потребитель может однозначно сказать, верно ли, что  $x \succsim y$ . Тем самым, на пространстве товаров задано отношение слабого предпочтения « $\succsim$ ». Слабое предпочтение определяет еще два отношения на пространстве товаров:

- отношение равноценности « $\sim$ »:  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда одновременно верно, что  $x \succsim y$  и  $y \succsim x$ ; запись « $x \sim y$ » означает равноценность наборов товаров  $x$  и  $y$  с точки зрения данного потребителя:  $x$  не хуже  $y$ , а  $y$  не хуже  $x$ ;
- отношение сильного предпочтения « $\succ$ »:  $x \succ y$  тогда и только тогда, когда верно, что  $x \succsim y$ , и неверно, что  $x \sim y$ ; запись « $x \succ y$ » означает, что набор товаров  $x$  с точки зрения данного потребителя строго лучше набора товаров  $y$ :  $x$  не хуже  $y$ , но при этом  $x$  и  $y$  не равноценны.

**Вторая аксиома потребителя** описывает свойства отношений « $\succsim$ », « $\sim$ » и « $\succ$ »:

- отношения слабого предпочтения и равноценности являются *рефлексивными* (т. е. для любого набора товаров  $x \in C$  верно, что  $x \succsim x$  и  $x \sim x$ );
- отношения слабого предпочтения, равноценности и сильного предпочтения являются *транзитивными* (т. е. для любых наборов товаров  $x, y, z \in C$  из того, что  $x \succsim y$ , а  $y \succsim z$ , следует, что  $x \succsim z$ ; из того, что  $x \sim y$ , а  $y \sim z$ , следует, что  $x \sim z$ ; из того, что  $x \succ y$ , а  $y \succ z$ , следует, что  $x \succ z$ );
- отношение равноценности является *симметричным* (т. е. из того, что  $x \sim y$ , следует, что  $y \sim x$ ).

**Третья аксиома потребителя** говорит о том, что каждый товар является для потребителя *желательным*, т. е. если  $x \geq y$ , то  $x \succsim y$ , а если  $x > y$ , то  $x \succ y$ .

Рациональное поведение потребителя состоит в выборе наиболее предпочтительного, с его точки зрения, набора товаров из бюджетного множества. При постановке и решении задачи определения рационального поведения потребителя удобнее оценивать привлекательность различных наборов товаров не с помощью отношений предпочтения и равноценности, а с помощью *функции полезности*, которая ставит в соответствие каждому набору товаров  $x \in C$  некоторое число  $u(x)$  — *полезность* данного набора товаров — и удовлетворяет двум условиям:

- $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$ ;
- $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$ .

(Из этих условий следует, очевидно, что  $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$ .)

Если выбран некоторый набор товаров  $\mathbf{x} \in C$ , то множество  $\mathcal{P}_x = \{\mathbf{y} \in C \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$  называется *множеством предпочтительности* для  $\mathbf{x}$ , а множество  $\mathcal{N}_x = \{\mathbf{z} \in C \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{z}\}$  называется *множеством неpreferredности* для данного набора товаров. Система предпочтений называется *непрерывной*, если для любого набора товаров  $\mathbf{x} \in C$  множества предпочтительности и неpreferredности являются замкнутыми.

**ТЕОРЕМА ДЕБРЕ.** Если система предпочтений потребителя непрерывна, то для такого потребителя существует непрерывная функция полезности.

Будем считать функцию полезности дифференцируемой, при этом частная производная  $\partial u / \partial x_i$  имеет смысл *предельной полезности*  $i$ -го товара: она показывает, насколько увеличится полезность, если добавить к данному набору товаров  $\mathbf{x}$  еще одну единицу  $i$ -го товара.

Перечислим **основные свойства функции полезности**:

- функция полезности определяется неоднозначно (если  $u(\mathbf{x})$  — некоторая функция полезности, то, например,  $u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + a$ ,  $u_2(\mathbf{x}) = bu(\mathbf{x})$  [при  $b > 0$ ],  $u_3(\mathbf{x}) = \log_c u(\mathbf{x})$  [при  $c > 1$ ] и любая другая строго возрастающая функция от  $u(\mathbf{x})$  также будут функциями полезности);
- функция полезности является строго возрастающей [аксиома желательности утверждает, что из того, что  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ , следует, что  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ; по определению функции полезности  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ , значит, если  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ , то  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ ];
- предельные полезности товаров положительны (поскольку функция полезности является строго возрастающей и дифференцируемой, то  $\partial u / \partial x_i > 0$ );
- небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность (или, иначе, предельная полезность первой единицы товара бесконечна):

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty;$$

- по мере увеличения потребления товара его предельная полезность уменьшается (**первый закон Госсена**):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0;$$

- при очень большом объеме потребления товара его дальнейшее увеличение не приводит к росту полезности:

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

На практике используются следующие **конкретные функции полезности**:

- *мультипликативная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 1$ ;

- *логарифмическая*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \log_d x_i,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ,  $d > 1$ ;

- *квадратичная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j,$$

где матрица  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  должна быть отрицательно определенной;

- *пропорциональная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \left\{ \frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \dots, \frac{x_n}{k_n} \right\},$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$  и др.

**ПРИМЕР 6.2.1.** Требуется убедиться в справедливости первого закона Госсена для мультипликативной функции полезности.

**Решение.** Имеем:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i-1} \dots x_n^{\alpha_n} = \alpha_i \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \alpha_i (\alpha_i - 1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i-2} \dots x_n^{\alpha_n} = -\alpha_i (1 - \alpha_i) \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i^2} < 0,$$

поскольку  $\alpha_i \in (0; 1)$ .  $\square$

Множество равноценных с точки зрения данного потребителя наборов товаров называется *поверхностью безразличия*. Если  $u(\mathbf{x})$  — функция полезности данного потребителя, то поверхность безразличия — это множество наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \mid u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}\}.$$

С геометрической точки зрения поверхность безразличия в пространстве  $n$  товаров представляет собой гиперповерхность  $(n - 1)$ -го порядка.

В дифференциальной форме условие  $u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}$  записывается следующим образом:

$$du = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0. \quad (6.2.2)$$

Г р а д и е н т функции полезности равен вектору предельных полезностей:

$$\text{grad } u = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x_1 \\ \partial u / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial u / \partial x_n \end{pmatrix}.$$

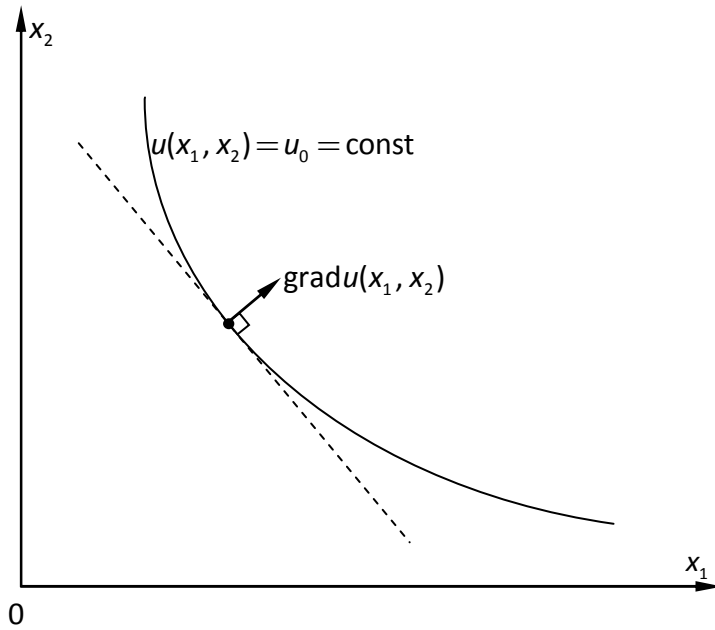
Условие (6.2.2) означает, что градиент функции полезности перпендикулярен касательной к поверхности безразличия (рис. 6.2.2).

Из рис. 6.2.2 видно, что снижение полезности, вызванное уменьшением количества одного товара, можно, вообще говоря, к о м п е н с и р о в а т ь увеличением количества другого товара. Рассмотрим некоторый набор товаров

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 \\ \vdots \\ x_j^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

и предположим, что количество  $i$ -го товара изменилось на величину  $dx_i$ , количество  $j$ -го товара изменилось на  $dx_j$ , а все остальные товары остались в тех же количествах, что и раньше; новый набор товаров

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 + dx_i \\ \vdots \\ x_j^0 + dx_j \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$



**Рис. 6.2.2. Поверхность безразличия и градиент функции полезности**

Чтобы старый и новый наборы товаров оказались на одной поверхности безразличия, необходимо выполнение условия (6.2.2). Учтем, что  $dx_k = 0$  при  $k \neq i, k \neq j$ , тогда получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

откуда

$$\frac{dx_j}{dx_i} = - \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

Величина

$$r_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j}{-\Delta x_i} = - \frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

называется *предельной нормой замены*  $i$ -го товара  $j$ -м; она показывает, на сколько единиц должно увеличиться количество  $j$ -го товара, чтобы компенсировать потерю единицы  $i$ -го товара (т. е. чтобы полезность набора товаров не изменилась).

Часто бывает удобно иметь дело не с абсолютными величинами, а с относительными. *Эластичность замены*  $i$ -го товара  $j$ -м ( $e_i^j$ ) показывает, на сколько процентов должно увеличиться количество  $j$ -го товара, чтобы компенсировать уменьшение количества  $i$ -го товара на 1%:

$$e_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j / x_j}{-\Delta x_i / x_i} = - \frac{x_i}{x_j} \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{x_j} r_i^j = \frac{x_i}{x_j} \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

### § 6.3. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Теперь сформулируем математически **задачу потребителя**: *требуется из бюджетного множества выбрать набор товаров, обладающий максимальной полезностью*:

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

Запишем эту задачу подробнее [с учетом (3.1.1)]:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq I, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТРЕБИТЕЛЯ.** *Решение*

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

*задачи потребителя (6.3.1) существует, лежит на границе бюджетного множества:*

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* + \dots + p_nx_n^* = I \quad (6.3.2)$$

*и если функция полезности является строго выпуклой вверх, то решение задачи потребителя (6.3.1) является единственным.*

**Доказательство.** Существование решения следует непосредственно из теоремы Вейерштрасса (о том, что непрерывная функция достигает на замкнутом ограниченном множестве максимального и минимального значения).

Условие (6.3.2) докажем от противного. Предположим, что в точке  $\mathbf{x}^*$  максимума функции полезности выполняется неравенство

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* + \dots + p_nx_n^* < I.$$

Тогда на остаток бюджета  $I - p_1x_1^* - p_2x_2^* - \dots - p_nx_n^*$  можно приобрести некоторый набор товаров  $\mathbf{a}^*$ , причем хотя бы одна из координат  $a_i^* > 0$ . Пусть  $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{a}^*$ , тогда  $\mathbf{y}^* \in \mathcal{B}$  и в силу аксиомы о том, что каждый товар является для потребителя желательным,  $u(\mathbf{y}^*) > u(\mathbf{x}^*)$ , что противоречит предположению, что  $\mathbf{x}^*$  — точка максимума функции полезности на бюджетном множестве.

Теперь докажем единственность решения задачи потребителя. Пусть существуют две точки максимума:  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$ . Тогда  $u(\mathbf{x}^{(1)}) = u(\mathbf{x}^{(2)})$ , при этом в силу условия (6.3.2)

$$\begin{aligned} p_1 x_1^{(1)} + p_2 x_2^{(1)} + \dots + p_n x_n^{(1)} &= I, \\ p_1 z_1^{(2)} + p_2 z_2^{(2)} + \dots + p_n z_n^{(2)} &= I. \end{aligned}$$

Рассмотрим точку  $\mathbf{x}^{(3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{z}^{(2)})$ . В этой точке, очевидно,

$$p_1 x_1^{(3)} + p_2 x_2^{(3)} + \dots + p_n x_n^{(3)} = I,$$

а поскольку по условию теоремы функция полезности строго выпукла вверх,

$$u(\mathbf{x}^{(3)}) = u\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{z}^{(2)})\right) > \frac{1}{2}(u(\mathbf{x}^{(1)}) + u(\mathbf{z}^{(2)})) = u(\mathbf{x}^{(1)}) = u(\mathbf{z}^{(2)}),$$

что входит в противоречие с предположением о том, что  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{z}^{(2)}$  — точки максимума.  $\square$

Перепишем задачу (6.3.1) в виде общей задачи выпуклого программирования:

$$\begin{aligned} &u(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq I, \\ -x_1 \leq 0, \\ \quad -x_2 \leq 0, \\ \quad \quad \ddots \\ \quad \quad \quad -x_n \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

введем вектор множителей Лагранжа

$$\mathbf{y} = (\lambda \quad y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n),$$

первая координата которого  $\lambda$  соответствует бюджетному ограничению  $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq I$ , а оставшиеся координаты  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — ограничениям неотрицательности спроса  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ , составим для задачи (6.3.3) функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda, y_1, y_2, \dots, y_n) &= \\ &= u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n) + \sum_{i=1}^n y_i x_i, \end{aligned}$$

и запишем для этой задачи условия Каруша — Куна — Таккера (3.2.3) — (3.2.6):

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda p_j + y_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.3.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n) = 0,$$

$$y_j \frac{\partial L}{\partial y_j} = y_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Выразив из (6.3.4)

$$y_j^* = \lambda^* p_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

перепишем остальные условия с учетом (6.3.2):

$$\lambda^* \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j^* = I, \quad (6.3.5)$$

$$x_j^* \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq \lambda^* p_j, \quad x_j^* \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda^* p_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3.6)$$

Условия (6.3.6) означают, что в оптимальной точке возможны два варианта: либо  $j$ -й товар потребляется в ненулевом количестве, и тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \quad (6.3.7)$$

либо  $\partial u / \partial x_j < \lambda^* p_j$ , и тогда  $j$ -й товар не потребляется. Отсюда следует очень важное свойство решения задачи потребителя: если в оптимальной точке  $i$ -й и  $j$ -й товары потребляются в ненулевом количестве, то предельная норма замены  $i$ -го товара  $j$ -м равна отношению цен  $i$ -го и  $j$ -го товаров:

$$r_i^j = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}. \quad (6.3.8)$$

Равенство (6.3.8) можно содержательно интерпретировать в виде **второго закона Госсена**: взаимозаменяемыми являются такие количества товаров, которые имеют одинаковую стоимость.

Кроме того, условия (6.3.6) означают и то, что вектор предельных полезностей потребляемых (в ненулевом количестве) товаров пропорционален вектору цен:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \dots : p_n. \quad (6.3.9)$$

Можно сделать еще один вывод из условий (6.3.6): у всех потребляемых (в ненулевом количестве) товаров в оптимальной точке отношения предельных полезностей к ценам совпадают и равны  $\lambda^*$ :

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2} = \dots = \frac{\partial u / \partial x_n}{p_n} = \lambda^*. \quad (6.3.10)$$

Это дает ответ на вопрос об **экономическом смысле множителя Лагранжа**  $\lambda^*$ : множитель Лагранжа равен предельной полезности одной денежной единицы (поскольку в оптимальной точке часть предельной полезности каждого товара, приходящаяся на единицу его цены, равна  $\lambda^*$ ).

Важно заметить, что для тех товаров, которые в оптимальной точке не потребляются, условия (6.3.8)—(6.3.10) не выполняются.

Если из условий (6.3.4) выразить  $\mathbf{x}^*$  как функцию от цен и богатства, то получим *функцию спроса* данного потребителя:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$ .

В параграфе 3.1 отмечалось, что при одновременном увеличении в  $k$  раз цен всех товаров и богатства потребителя бюджетное множество не изменяется, поэтому, очевидно,

$$\mathbf{x}^*(kp_1, kp_2, \dots, kp_n, kI) = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I); \quad (6.3.11)$$

**ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ СПРОСА.** Если решение задачи потребителя (6.3.1) дифференцируемо, то пропорциональное изменение всех цен и доходов не влияет на спрос:

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_j^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)}{\partial p_i} + I \frac{\partial x_j^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)}{\partial I} = 0; \quad (6.3.12)$$

*изменение цены одного товара не влияет на общие расходы:*

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)}{\partial p_j} + x_j^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = 0; \quad (6.3.13)$$

*изменение дохода влечет соответствующее изменение суммарных расходов*

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)}{\partial I} = 1; \quad (6.3.14)$$

**Доказательство.** Условие (6.3.12) получается дифференцированием по  $k$  равенства (6.3.11), а условия (6.3.13) и (6.3.14) — дифференцированием соответственно по  $p_j$  и по  $I$  равенства (6.3.2).  $\square$

**ПРИМЕР 6.3.1.** В условиях примера 6.1.1 известна также функция полезности потребителя  $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$ . Требуется определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве  $I$  и векторе цен  $\mathbf{p}$ .

**Решение.** Предельные полезности товаров в данном примере равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}}.$$

В оптимальном решении задачи потребителя  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$ , так как  $u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, 0, x_3) = u(0, x_2, x_3) = 0$ . Поэтому условия (3.2.2), (3.2.7) для определения функции спроса принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1}, \\ \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \frac{\sqrt{x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} x_1 = \frac{x_2 x_3}{4\lambda^2 p_1^2}, \\ \frac{x_3}{4\lambda p_1} = \lambda p_2, \\ \frac{x_2}{4\lambda p_1} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2 p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1 p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1 p_3, \\ 12\lambda^2 p_1 p_2 p_3 = I \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1}, \\ x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2}, \\ x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3}, \\ \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1 p_2 p_3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, функция спроса данного потребителя

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I / (3p_1) \\ I / (3p_2) \\ I / (3p_3) \end{pmatrix}, \quad (6.3.15)$$

а предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1 p_2 p_3}}.$$

При данном векторе цен  $\mathbf{p} = (2 \ 5 \ 6)$  и богатстве  $I = 30$  получаем:

$$x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5, \quad x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2,$$

$$x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3 \cdot 6} = \frac{5}{3}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Итак, вектор спроса при данных ценах и данном богатстве таков:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## § 6.4. УРАВНЕНИЕ СЛУЦКОГО

Рассмотрим, как изменится спрос потребителя, если изменится цена одного из товаров (например,  $j$ -го).

Предположим вначале, что при изменении цены  $j$ -го товара на величину  $\Delta p_j$  (при неизменных ценах остальных товаров) происходит компенсация богатства на такую величину  $\Delta I$ , чтобы новая точка оптимального спроса осталась на той же поверхности безразличия, что и старая [иными словами, чтобы полезность набора товаров

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \dots, p_j + \Delta p_j, \dots, p_n, I + \Delta I),$$

оптимального при векторе цен  $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j + \Delta p_j \ \dots \ p_n)$  и богатстве  $I + \Delta I$ , была бы равна полезности набора товаров

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n, I),$$

оптимального при векторе цен  $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j \ \dots \ p_n)$  и богатстве  $I$  (рис. 6.4.2)].

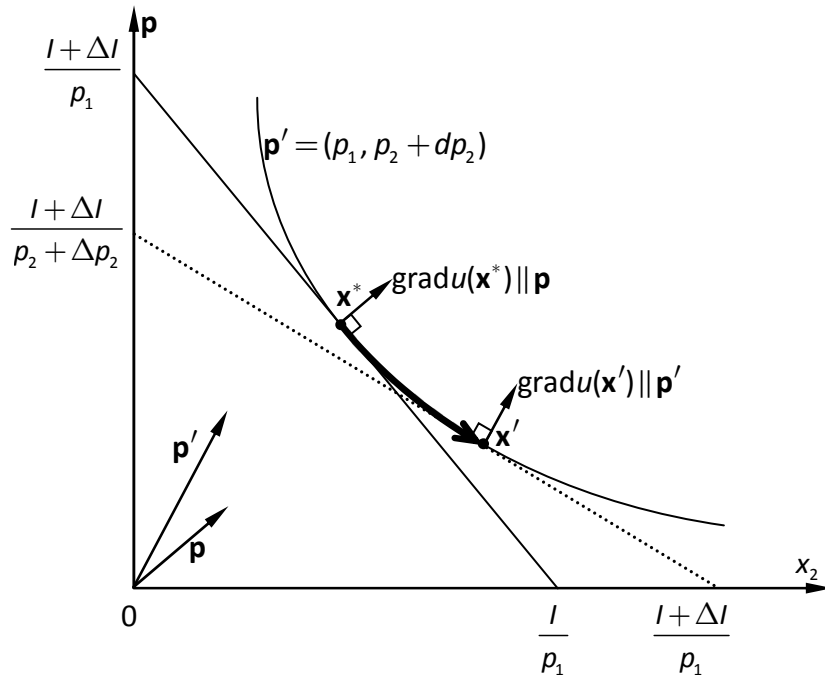
Если теперь устремить  $\Delta p_j$  к нулю и рассмотреть предел

$$\lim_{\substack{\Delta p_j \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j} = \lim_{\substack{\Delta p_j \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i' - x_i^*}{\Delta p_j} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta p_j \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i^*(p_1, p_2, \dots, p_j + \Delta p_j, \dots, p_n, I + \Delta I) - x_i^*(p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n, I)}{\Delta p_j},$$

то мы получим изменение спроса на  $i$ -й товар при изменении цены  $j$ -го товара на единицу и сопутствующем компенсирующем изменении богатства; это изменение обозначается

$$\left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_j \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}.$$



**Рис. 6.4.2. Изменение спроса с компенсацией дохода**

Величина  $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{\text{комп.}}$  отражает эффект замещения — при изменении цены  $j$ -го товара и компенсирующем изменении богатства потребитель останется на той же поверхности безразличия, что и раньше, для чего заменит часть  $j$ -го товара другими товарами.

Найдем величину такого компенсирующего изменения богатства  $dI$  при бесконечно малом изменении цены  $j$ -го товара (на  $dp_j$ ) и неизменных остальных ценах [т. е. при изменении цен  $p_i$  всех остальных товаров (с номерами  $k \neq j$ ) на  $dp_k = 0$ ].

Из условий оптимального поведения потребителя (3.2.4) получаем, что

$$du = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = \lambda^* \sum_{k=1}^n p_k dx_k, \quad dI = \sum_{k=1}^n p_k dx_k + \sum_{k=1}^n x_k^* dp_k.$$

Чтобы полезность не изменилась, необходимо и достаточно, чтобы  $du = 0$ , и поскольку предельная полезность денег  $\lambda^* \neq 0$ , то

$$\sum_{k=1}^n p_k dx_k = 0.$$

Но тогда

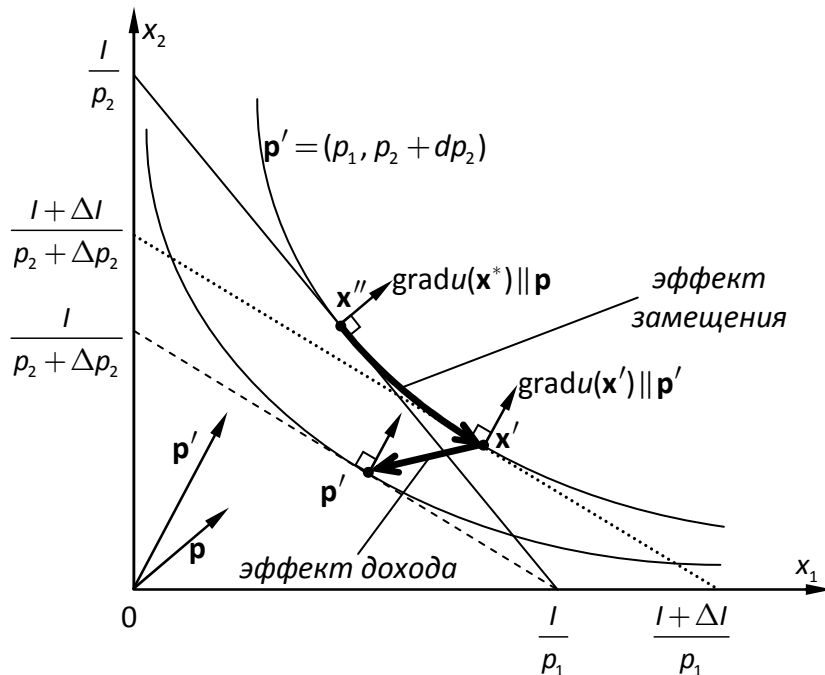
$$dI = \sum_{k=1}^n p_k dx_k + \sum_{k=1}^n x_k^* dp_k = \sum_{k=1}^n x_k^* dp_k = x_j^* dp_j \quad (6.4.1)$$

(где мы учли также, что  $dp_k = 0$  при  $k \neq j$ ).

На самом деле компенсации богатства потребителя при изменении цен не происходит, и изменение спроса потребителя на  $i$ -й товар при изменении цены  $j$ -го товара на единицу равно

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{компл.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (6.4.2)$$

Уравнение (6.4.2), полученное в 1915 г. Е. Е. Слуцким, играет важнейшую роль в теории потребительского спроса. Вычитаемое в этом уравнении отражает эффект дохода, связанный с изменением потребительской ценности единицы богатства. Фактически потребитель не остается на той же поверхности безразличия, что и раньше, а переходит на другую поверхность безразличия, соответствующую другим количествам товаров, которые он может позволить себе приобрести при изменении цены  $j$ -го товара и неизменном богатстве и ценах остальных товаров. Эффект дохода и эффект замещения иллюстрируется рис. 6.4.3.



**Рис. 6.4.3.** Эффект дохода и эффект замещения

**ПРИМЕР 6.4.1.** В условиях примера 6.3.1 требуется убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя.

**Решение.** Рассмотрим, например, что произойдет со спросом при изменении цены первого товара. Пусть цена первого товара изменилась с  $p_1$  до  $p_1 + \Delta p_1$ . Если произошло соответствующее компенсирующее изменение богатства на величину  $\Delta I = x_1^* \Delta p_1 = I \Delta p_1 / 3 p_1$  [определенную по формуле (6.4.1)], то новая точка спроса

$$\mathbf{x}^*(p_1 + \Delta p_1, p_2, p_3, I + \Delta I) = \begin{pmatrix} \frac{I + \Delta I}{3(p_1 + \Delta p_1)} \\ \frac{I + \Delta I}{3p_2} \\ \frac{I + \Delta I}{3p_3} \end{pmatrix},$$

т. е. изменение спроса составляет

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*(p_1 + \Delta p_1, p_2, p_3, I + \Delta I) - \mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{I + \Delta I}{3(p_1 + \Delta p_1)} - \frac{I}{3p_1} \\ \frac{I + \Delta I}{3p_2} - \frac{I}{3p_2} \\ \frac{I + \Delta I}{3p_3} - \frac{I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(I + \Delta I)p_1 - I(p_1 + \Delta p_1)}{3p_1(p_1 + \Delta p_1)} \\ \frac{\Delta I}{3p_2} \\ \frac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_1 \Delta I - I \Delta p_1}{3p_1(p_1 + \Delta p_1)} \\ \frac{\Delta I}{3p_2} \\ \frac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставим сюда  $\Delta I = I \Delta p_1 / (3p_1)$ , получим

$$\Delta \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{p_1 I \Delta p_1 / (3p_1) - I \Delta p_1}{3p_1(p_1 + \Delta p_1)} \\ \frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_2} \\ \frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2I \Delta p_1}{9p_1(p_1 + \Delta p_1)} \\ \frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_2} \\ \frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим изменение спроса при бесконечно малом изменении цены первого товара и компенсирующем изменении дохода:

$$\left( \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} \right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\frac{-2I \Delta p_1}{9p_1(p_1 + \Delta p_1)}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{-2I}{9p_1(p_1 + \Delta p_1)} = -\frac{2I}{9p_1^2},$$

$$\left( \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_2}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1 p_2} = \frac{I}{9p_1 p_2},$$

$$\left( \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} \right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_3^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\frac{I \Delta p_1}{9p_1 p_3}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \rightarrow 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1 p_3} = \frac{I}{9p_1 p_3}.$$

Найдем теперь  $\partial x_i^* / \partial p_1$ ,  $\partial x_i^* / \partial I$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} &= \frac{\partial [I / (3p_1)]}{\partial p_1} = -\frac{I}{3p_1^2}, & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} &= \frac{\partial [I / (3p_2)]}{\partial p_1} = 0, & \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} &= \frac{\partial [I / (3p_3)]}{\partial p_1} = 0, \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial I} &= \frac{\partial [I / (3p_1)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_1}, & \frac{\partial x_2^*}{\partial I} &= \frac{\partial [I / (3p_2)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_2}, & \frac{\partial x_3^*}{\partial I} &= \frac{\partial [I / (3p_3)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_3}. \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_1^* &= -\frac{2I}{9p_1^2} - \frac{1}{3p_1} \frac{I}{3p_1} = -\frac{I}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}, \\ \left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_1^* &= \frac{I}{9p_1p_2} - \frac{1}{3p_2} \frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}, \\ \left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_3^*}{\partial I} x_1^* &= \frac{I}{9p_1p_3} - \frac{1}{3p_3} \frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1},\end{aligned}$$

т. е. уравнение Слуцкого (6.4.2) для данного потребителя действительно выполняется.  $\square$

Можно показать, что

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} < 0, \quad (6.4.3)$$

т. е. при увеличении цены ( $i$ -го) товара, сопровождающемся компенсирующим изменением богатства, спрос на данный товар падает.

Товар с номером  $i$  называется *ценным*, если при увеличении богатства спрос на него растет, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0, \quad (6.4.4)$$

и *малоценным*, если при увеличении богатства спрос на этот товар снижается:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0.$$

В оптимальной точке [согласно (3.2.4)]

$$\sum_{k=1}^n p_k x_k^* = I.$$

Продифференцируем левую и правую части этого равенства по  $I$ :

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k^*}{\partial I} = 1.$$

Отсюда (с учетом того, что все  $p_k > 0$ ) следует, что среди частных производных  $\partial x_k^* / \partial I$  есть хотя бы одна положительная, т. е. обязательно существует хотя бы один ценный товар.

Товар с номером  $i$  называется *нормальным*, если при увеличении его цены спрос на него падает, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0,$$

и товаром Гиффина, если при увеличении цены этого товара спрос на него растёт:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0.$$

Спрос на ценный товар обязательно падает при увеличении его цены: в правой части уравнения Слуцкого (6.4.2), записанного при  $j = i$ ,

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$$

уменьшаемое отрицательно согласно (6.4.3), а вычитаемое неотрицательно, так как  $\partial x_i^* / \partial I > 0$  согласно (6.4.4), а спрос  $x_i^*$  не может быть отрицательным. Таким образом, ценные товары не могут быть товарами Гиффина.

Резюмируя, замечаем, что все товары делятся на три категории (табл. 6.4.1):

- нормальные ценные товары, примером такого товара является мясо: если цена мяса увеличится, то потребитель приобретет его меньше, а если увеличится богатство потребителя, то он увеличит потребление мяса;
- нормальные малоценные товары, примером такого товара служит маргарин: потребитель приобретет меньше маргарина и в том случае, когда увеличится цена маргарина, и в том случае, когда увеличится богатство потребителя;
- товары Гиффина, в качестве примера такого товара традиционно приводят картофель в Ирландии XIX в.: в то время большая часть потребительских расходов населения тратилась на приобретение картофеля, но по мере увеличения богатства потребители предпочитали покупать больше мяса и меньше картофеля; при увеличении цены картофеля реальный доход потребителя уменьшался настолько, что он уже не могли покупать столько же мяса, как и прежде, и потому был вынужден увеличивать потребление картофеля.

**Таблица 6.4.1**

Влияние изменения цены товара \ Влияние изменения дохода	ценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$	малоценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$
нормальные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$	пример: мясо	пример: маргарин
товары Гиффина: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$	—	пример: картофель в середине XIX в. в Ирландии

Два товара с номерами  $i$  и  $j$  называются *взаимозаменяемыми*, если увеличение цены  $j$ -го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства приводит к увеличению спроса на  $i$ -й товар:

$$\left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп.}} > 0;$$

товары называются *взаимодополняющими*, если увеличение цены  $j$ -го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства ведет к уменьшению спроса на  $i$ -й товар:

$$\left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп.}} < 0.$$

Эти определения корректны, поскольку можно показать, что матрица

$$\mathbf{D} = \left( d_{ij} = \left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп.}} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

является симметричной, т. е.

$$\left( \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{комп.}} = \left( \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \right)_{\text{комп.}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Примерами пар взаимозаменяемых товаров являются яблоки и груши, чай и кофе, сыр и колбаса и т. п.; примерами пар взаимодополняющих товаров являются компьютеры и компьютерные принтеры, автомобили и бензин, брюки и ремни и т. д.

Можно показать, что для любого товара обязательно найдется другой товар, составляющий с первым взаимозаменяемую пару. В частности, если рассматривать рынок двух товаров, то эти два товара обязательно должны быть взаимозаменяемыми.

**ПРИМЕР 6.4.2.** В условиях примера 6.4.1 определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

**Решение.** Поскольку

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_1} > 0, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_2} > 0, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_3} > 0,$$

все три товара ценные (так как ценные товары не могут быть товарами Гиффина, все три товара являются нормальными). Первый и второй товары являются взаимозаменяемыми, так как

$$\left( \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \right)_{\text{комп.}} = \frac{I}{9p_1p_2} > 0.$$

Точно так же можно показать, что первый и третий, а также второй и третий товары образуют взаимозаменяемые пары, а взаимодополняющие товары для данного потребителя отсутствуют.  $\square$

## § 6.5. МОДЕЛЬ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим рынок  $n$  товаров с  $k$  участниками. Пусть вектор

$$\mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}$$

определяет начальные запасы товаров у  $j$ -го участника, а  $u^j(\mathbf{x}) = u^j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция полезности  $j$ -го участника ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Предположим, что участники рынка согласны обмениваться товарами. Для этого они должны ввести некоторую денежную единицу и определить вектор рыночных цен  $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ .

Если на рынке будут установлены некоторые цены товаров:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , то начальное богатство каждого участника (до обмена) в денежном выражении определяется как

$$I_j = \mathbf{p}\mathbf{x}^j = \sum_{l=1}^n p_l x_l^j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

При этом суммарное предложение  $i$ -го товара на рынке будет равно суммарным запасам этого товара у всех участников:

$$Q_i^S = \sum_{j=1}^k x_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь можно для каждого участника поставить задачу потребителя и определить функции спроса участников рынка:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = & \quad (6.5.1) \\ = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \tilde{x}_2^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \\ \tilde{x}_2^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^n p_l x_l^j\right) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Таким образом, суммарный спрос всех участников на  $i$ -й товар будет равен

$$Q_i^D = \sum_{j=1}^k \tilde{x}_i^j \left( p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^n p_l x_l^j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно **закону Вальраса** рыночное равновесие определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару:

$$Q_i^D = Q_i^S, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\sum_{j=1}^k \tilde{x}_i^j \left( p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^n p_l x_l^j \right) = \sum_{j=1}^k x_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.5.2)$$

Можно показать, что одно из уравнений данной системы обязательно является следствием остальных, поэтому цены определяются из этой системы с точностью до коэффициента пропорциональности. Это очевидно: ведь цены зависят от выбора денежной единицы.

Таким образом, можно определить равновесное конечное распределение товаров между участниками рынка, подставив в функции спроса (6.5.1) равновесные цены, определенные из системы (6.5.2).

**ПРИМЕР 6.5.1.** Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности  $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$ , а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Пусть цены товаров на рынке определяются вектором  $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3)$ , тогда начальное богатство первого участника составит

$$I_1 = \mathbf{p}\mathbf{x}^1 = p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 + p_3 x_3^1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3.$$

Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четвертого участников рынка:

$$I_2 = \mathbf{p}\mathbf{x}^2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3, \quad I_3 = \mathbf{p}\mathbf{x}^3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3, \quad I_4 = \mathbf{p}\mathbf{x}^4 = p_1 + p_2 + 6p_3.$$

Функции спроса участников одинаковы, так как функция полезности у них одна и та же. Для данной функции полезности функция спроса (6.3.15):

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} I_j / (3p_1) \\ I_j / (3p_2) \\ I_j / (3p_3) \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, 3, 4,$$

была определена в примере 6.2.1.

Суммарный спрос на первый товар составляет

$$\begin{aligned} Q_1^D &= \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} = \\ &= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} = \\ &= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1}, \end{aligned}$$

аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары:

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, \quad Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}.$$

Суммарное предложение первого товара равно

$$\begin{aligned} Q_1^S &= x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7, \\ Q_2^S &= x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2 + 2 + 4 + 1 = 9, \\ Q_3^S &= x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3 + 2 + 5 + 6 = 16. \end{aligned}$$

Запишем условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Q_1^D = Q_1^S, \\ Q_2^D = Q_2^S, \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1} = 7, \\ \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2} = 9, \\ \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 21p_1, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 27p_2, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 48p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 - 18p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 + 9p_2 - 32p_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение данной системы уравнений с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 6.5.1.

Таблица 6.5.1

-14	9	16	0
7	-18	16	0
7	9	-32	0
0	-27	48	0
1	-18/7	16/7	0
0	27	-48	0
0	1	-16/9	0
1	0	-16/7	0
0	0	0	0

Таким образом, общее решение системы для определения равновесных цен таково:

$$p_1 = \frac{16}{7}\alpha, \quad p_2 = \frac{16}{9}\alpha, \quad p_3 = \alpha,$$

где, очевидно, цена третьего товара  $\alpha > 0$ . Ясно, что цены определяются относительно, поэтому для удобства положим  $p_3 = \alpha = 63$  ден. ед., тогда

$$p_1 = \frac{16}{7} \cdot 63 = 144 \text{ ден. ед.}, \quad p_2 = \frac{16}{9} \cdot 63 = 112 \text{ ден. ед.}$$

При таких ценах начальные запасы участников рынка определяют их богатство:

$$I_1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 144 + 2 \cdot 112 + 3 \cdot 63 = 557,$$

$$I_2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2 \cdot 144 + 2 \cdot 112 + 2 \cdot 63 = 638,$$

$$I_3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3 = 3 \cdot 144 + 4 \cdot 112 + 5 \cdot 63 = 1195,$$

$$I_4 = p_1 + p_2 + 6p_3 = 144 + 112 + 6 \cdot 63 = 634.$$

Теперь можно определить равновесное распределение товаров:

$$\tilde{\mathbf{x}}^1(p_1, p_2, p_3, I_1) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{557}{3 \cdot 144} \\ \frac{557}{3 \cdot 112} \\ \frac{557}{3 \cdot 63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{557}{432} \\ \frac{557}{336} \\ \frac{557}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^2(p_1, p_2, p_3, I_2) = \begin{pmatrix} \frac{I_2}{3p_1} \\ \frac{I_2}{3p_2} \\ \frac{I_2}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{638}{432} \\ \frac{638}{336} \\ \frac{638}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^3(p_1, p_2, p_3, I_3) = \begin{pmatrix} \frac{I_3}{3p_1} \\ \frac{I_3}{3p_2} \\ \frac{I_3}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1195}{432} \\ \frac{1195}{336} \\ \frac{1195}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^4(p_1, p_2, p_3, I_4) = \begin{pmatrix} \frac{I_4}{3p_1} \\ \frac{I_4}{3p_2} \\ \frac{I_4}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{634}{432} \\ \frac{634}{336} \\ \frac{634}{189} \end{pmatrix}. \quad \square$$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Во сколько раз возрастет объем бюджетного множества при увеличении дохода в два раза?
2. Постройте несколько кривых равноценности для мультипликативной функции полезности двух товаров  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$  ( $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$ ). Найдите предельные нормы замены и эластичности замены одного товара другим для этой функции.
3. Постройте несколько кривых равноценности для пропорциональной функции полезности двух товаров  $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$ . Найдите предельные нормы замены и эластичности замены одного товара другим для этой функции.
4. Найдите функцию спроса потребителя, обладающего линейной функцией полезности  $u(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ .
5. Найдите функцию спроса потребителя, обладающего пропорциональной функцией полезности  $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$ .
6. Найдите функцию спроса потребителя, обладающего мультипликативной функцией полезности  $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1x_2}$ .
7. Какой смысл имеет множитель Лагранжа  $\lambda$  в задаче определения потребительского спроса?
8. Убедитесь, что уравнение Слуцкого действительно выполняется для функции полезности  $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1x_2}$ .
9. Составьте уравнение Слуцкого для пропорциональной функции полезности двух товаров  $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$ .

10. Найдите состояние равновесия на рынке, если функция спроса  $D(p) = a - bp$ , а функция предложения  $S(p) = -c + dp$  ( $p$  — цена товара,  $a, b, c, d > 0$  — константы).
11. Каков содержательный смысл конкурентного равновесия в модели Вальраса?
12. Проверьте выполнение закона Вальраса на рынке с тремя участниками, имеющими одинаковые функции полезности  $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$ , если вектор цен  $\mathbf{p} = (1 \ 2 \ 3)$ , а начальное имущество участников описывается векторами  $(1 \ 2 \ 3)$ ,  $(2 \ 3 \ 4)$  и  $(3 \ 4 \ 5)$ .
13. На рынке продаются  $n$  товаров по ценам  $p_1, p_1, \dots, p_n$ . В качестве  $(n + 1)$ -го товара выступают деньги, т. е.  $p_{n+1} = 1$ . Функция полезности набора товаров совпадает с его стоимостью. Найдите предельные полезности первых  $n$  товаров и предельные нормы замещения первых  $n$  товаров деньгами.
14. Убедитесь, что уравнение Слуцкого действительно выполняется для функции полезности  $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}$ .

## ГЛАВА 7. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

### § 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Динамическое программирование* представляет собой математический аппарат, разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Специфика метода динамического программирования состоит в том, что для отыскания оптимального управления планируемая операция разделяется на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования операции становится многошаговым и развивается последовательно, от этапа к этапу, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Состояние системы на каждом шаге  $i = 1, 2, \dots, n$  характеризуется некоторой переменной — *параметром состояния*  $x_i$ , который зависит от своего значения на предыдущем шаге  $x_{i-1}$  и от выбранного на данном шаге управления  $u_i$ :

$$x_i = f_i(x_{i-1}, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Наилучший эффект на данном этапе вместе с уже рассмотренными шагами характеризуется *функцией состояния*. Решение конкретной задачи методом динамического программирования сводится к выбору параметра состояния (что требует определенного навыка), составлению функции состояния и рекуррентных соотношений, связывающих функции состояния для двух соседних последовательных этапов, и их применению для выбора оптимального управления.

Принцип динамического программирования предполагает, что управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться «без оглядки на будущее» — это последний шаг. Спланировав оптимальным образом этот последний шаг, можно к нему «пристраивать» предпоследний, затем предыдущий и т. д.

Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, т. е. рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбирается управление на втором от конца шаге так, чтобы оно вместе в уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

В начале процесса состояние системы нам известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея в виду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге так, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Принцип, положенный в основу построения такого решения (искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент), принято называть *принципом оптимальности*.

## § 7.1. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Знакомство с методом динамического программирования проще всего начать с рассмотрения нелинейной задачи распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения или отрасли. Для определенности можно считать, что речь идет о распределении капитальных вложений.

Предположим, что производственный холдинг состоит из  $n$  предприятий, и на их развитие выделены инвестиции в размере  $b$  ден. ед. Обозначим через  $z_i(x)$  прирост мощности или прибыли на  $i$ -м предприятии, если оно получит инвестиции в размере  $x$  ден. ед. В динамической задаче распределения инвестиций требуется найти такое распределение

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли

$$z = z_1(u_1) + z_2(u_2) + \dots + z_n(u_n) \rightarrow \max$$

при ограничении по общей сумме инвестиций

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = b.$$

Будем считать, что все управления  $u_i$  принимают только целые неотрицательные значения

$$u_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Функции  $z_i(u_i)$  мы считаем заданными, заметив, что их определение — довольно трудоемкая экономическая задача.

Воспользуемся для решения этой задачи методом динамического программирования.

Введем параметр состояния и определим функцию состояния. За параметр состояния  $x$  примем денежную сумму, выделяемую несколькими предприятиями, а функцию состояния  $F_k(x)$  определим как максимальную прибыль на первых  $k$  предприятиях, если они вместе получают  $x$  ден. ед. Параметр  $x$  может изменяться от 0 до  $b$ .

Если из  $x$  руб.  $k$ -е предприятие получит  $u_k$  руб., то каково бы ни было это значение, остальные  $x - u_k$  руб. естественно распределить между предприятиями от первого до  $(k - 1)$ -го так, чтобы была получена максимальная прибыль  $F_{k-1}(x - u_k)$ .

Тогда прибыль  $k$  предприятий будет равна  $z_k(u_k) + F_{k-1}(x - u_k)$ . Нужно выбрать такое значение  $u_k$  между 0 и  $x$ , чтобы эта сумма была максимальной. Таким образом, мы приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(x) = \max_{0 \leq u_k \leq x} \{z_k(u_k) + F_{k-1}(x - u_k)\}$$

для  $k = 2, 3, \dots, n$ . Если же  $k = 1$ , то

$$F_1(x) = z_1(x).$$

**ПРИМЕР 7.1.1.** Производственное объединение состоит из четырех предприятий ( $n = 4$ ). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. ( $b = 700$ ), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если  $i$ -е предприятие получит инвестиции в объеме  $x$  млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит  $z_i(x)$  млн. руб. в год (значения функций  $z_i(x)$  приведены в табл. 7.1.1). Требуется найти такое распределение

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях.

Таблица 7.1.1

$x$	0	100	200	300	400	500	600	700
$z_1(x)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$z_2(x)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$z_3(x)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$z_4(x)$	0	30	52	76	90	104	116	125

**РЕШЕНИЕ.** Прежде всего заполняем табл. 7.1.2. Для каждого  $x = 0, 100, 200, \dots, 700$  рассматриваем все возможные значения управления  $u_2 = 0, 100, 200, \dots, x$ , и значения  $F_1(x - u_2) = z_1(x - u_2)$  складываем со значениями  $z_2(u_2)$ . На каждой северо-восточной диагонали находим наибольшее число (выделяя его цветом) и указываем соответствующее значение  $u_2^*(x)$ .

Затем заполняем табл. 7.1.3.

Таблица 7.1.2

$x - u_2$		0	100	200	300	400	500	600	700
$u_2$	$F_1(x - u_2)$	0	20	34	46	53	55	60	60
	$z_2(u_2)$	0	20	34	46	53	55	60	60
0	0	0	20	34	46	53	55	60	60
100	18	18	38	52	64	71	73	78	
200	29	29	49	63	75	82	84		
300	45	45	65	79	91	98			
400	62	62	82	96	108				
500	78	78	98	112					
600	90	90	110						
700	98	98							

Таблица 7.1.3

$x$	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_2(x)$	0	20	38	52	65	82	98	112
$u_2^*(x)$	0	0	100	100	300	400	500	500

Продолжая процесс, табулируем функции  $F_3(x)$ ,  $u_3^*(x)$  и т. д. (табл. 7.1.4—7.1.5).

В табл. 7.1.6 заполняем только одну диагональ для значения  $x = 700$ . Наибольшее число на этой диагонали

$$z^* = 155 \text{ млн. руб.},$$

причем четвертому предприятию должно быть выделено

$$u_4^* = u_4^*(700) = 300 \text{ млн. руб.}$$

Таблица 7.1.4

$x_3$	$x - u_3$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$F_2(x - u_3)$ $z_3(u_3)$	0	20	38	52	65	82	98	112
0	0	0	20	38	52	65	82	98	112
100	25	25	45	63	77	90	107	123	
200	41	41	61	79	93	106	123		
300	52	52	72	94	112	126			
400	74	74	94	112	126				
500	82	82	102	120					
600	88	88	106						
700	90	90							

Таблица 7.1.5

$x$		0	100	200	300	400	500	600	700
$F_3(x)$		0	25	45	63	79	94	112	126
$u_3^*(x)$		0	100	100	100	200	400	400	400

Таблица 7.1.6

$u_4$	$x - u_4$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$F_3(x - u_4)$ $z_4(u_4)$	0	25	45	63	79	94	112	126
0	0								126
100	30							142	
200	52						146		
300	76					155			
400	90				153				
500	104			149					
600	116		141						
700	125	125							

На долю остальных трех предприятий остается 400 млн. руб. Из табл. 7.1.5 видно, что третьему предприятию должно быть выделено

$$u_3^* = u_3^*(700 - u_4^*) = u_3^*(400) = 200 \text{ млн. руб.}$$

Продолжая обратный процесс, находим

$$u_2^* = u_2^*(700 - u_4^* - u_3^*) = u_2^*(200) = 100 \text{ млн. руб.}$$

На долю первого предприятия остается

$$u_1^* = 700 - u_4^* - u_3^* - u_2^* = 100 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капиталовложений по предприятиям:

$$u_1^* = 100, u_2^* = 100, u_3^* = 200, u_4^* = 300.$$

Оно обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост прибыли 155 млн. руб.

Читателю рекомендуется проверить выполнение равенства

$$z_1(u_1^*) + z_2(u_2^*) + z_3(u_3^*) + z_4(u_4^*) = z^*. \quad \square$$

## **§ 7.2. Многошаговая задача управления производством и запасами**

Рассмотрим предприятие, которое производит партиями некоторые изделия. Предположим, что предприятие получило заказы на  $n$  месяцев, причем размеры заказов значительно меняются от месяца к месяцу, поэтому иногда целесообразнее выполнить одной партией заказы нескольких месяцев (и затем хранить изделия, пока они не потребуются), чем выполнять заказ именно в тот месяц, когда он должен быть отправлен. Необходимо составить план производства на указанные  $n$  месяцев с учетом затрат на производство и хранение изделий. Введем обозначения:

- $u_j$  — число изделий, производимых в  $j$ -й месяц;
- $x_j$  — величина запаса к началу  $j$ -го месяца (это число не содержит изделий, произведенных в  $j$ -м месяце);
- $d_j$  — число изделий, которые должны быть отгружены в  $j$ -м месяце;
- $f_j(x_{j+1}, u_j)$  — затраты на хранение и производство изделий в  $j$ -м месяце.

Будем считать, что величины запасов к началу первого месяца  $x_1$  и к концу последнего  $x_{n+1}$  заданы.

Задача состоит в том, чтобы найти план производства

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (7.2.1)$$

компоненты которого удовлетворяют условиям материального баланса

$$x_j + u_j - d_j = x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7.2.2)$$

и минимизируют суммарные затраты за весь планируемый период

$$z = \sum_{j=1}^n f_j(x_{j+1}, u_j) \rightarrow \min, \quad (7.2.3)$$

причем

$$x_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad u_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2.4)$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, заметим, что для любого месяца  $j$  величина  $x_{j+1}$  запаса к концу месяца должна удовлетворять ограничениям

$$0 \leq x_{j+1} \leq d_{j+1} + d_{j+2} + \dots + d_n, \quad (7.2.5)$$

т. е. объем производимой продукции  $u_j$  на этапе  $j$  может быть настолько велик, что запас  $x_{j+1}$  удовлетворяет спрос на всех последующих этапах, но не имеет смысла иметь  $x_{j+1}$  больше суммарного спроса на всех последующих этапах. Кроме того, из соотношений (7.2.2) и (7.2.4) непосредственно следует, что управление  $u_j$  должно удовлетворять ограничениям

$$0 \leq u_j \leq d_j + x_{j+1}. \quad (7.2.6)$$

Следует также заметить, что переменные  $x_j, u_j$  могут принимать только целые неотрицательные значения.

Будем решать задачу (7.2.1)—(7.2.6) методом динамического программирования.

Введем параметр состояния и составим функцию состояния.

За параметр состояния  $x$  примем наличный запас в конце  $k$ -го месяца

$$x = x_{k+1},$$

а функцию состояния  $F_k(x)$  определим как минимальные затраты за первые  $k$  месяцев при выполнении условия (7.2.5):

$$F_k(x) = \min_{u_1, u_2, \dots, u_k} \sum_{j=1}^k f_j(x_{j+1}, u_j),$$

где минимум берется по неотрицательным целым значениям  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} x_j + u_j - d_j &= x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \\ x_k + u_k - d_k &= x. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Учитывая, что

$$\min_{u_1, u_2, \dots, u_k} \sum_{j=1}^k f_j(x_{j+1}, u_j) = \min_{u_k} \left\{ f_k(x_{k+1}, u_k) + \min_{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_{j+1}, u_j) \right\},$$

и величина запаса  $x_k$  к концу  $(k-1)$ -го периода, как видно из уравнения (7.2.7), равна

$$x_k = x + d_k - u_k,$$

приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(x) = \min_{u_k} \left\{ f_k(x, u_k) + F_{k-1}(x + d_k - u_k) \right\},$$

где минимум берется по единственной переменной  $u_k$ , которая, согласно (7.2.6), может изменяться в пределах

$$0 \leq u_k \leq d_k + x,$$

принимая целые значения, причем верхняя граница зависит от значений параметра состояния, изменяющегося в пределах

$$0 \leq x \leq d_{k+1} + d_{k+1} + \dots + d_n, \quad (7.2.8)$$

а индекс  $k$  может принимать значения

$$k = 2, 3, 4, \dots, n.$$

Если  $k = 1$ , то

$$F_1(x_2) = \min_{u_1} f_1(x_2, u_1),$$

где

$$u_1 = x + d_1 - x_1,$$

$$0 \leq x \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n,$$

т. е. на начальном этапе при фиксированном уровне  $x_1$  исходного запаса каждому значению параметра  $x$  отвечает только одно значение переменной  $u_1$ , что несколько уменьшает объем вычислений.

Применив вычислительную процедуру динамического программирования, на последнем шаге (при  $k = n$ ) находим значение последней компоненты  $u_n^*$  оптимального решения, а остальные компоненты определяем как

$$u_k^* = u_k^* \left( x_{n+1} + \sum_{j=k+1}^n (d_j - u_j^*) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Рассмотрим более подробно функции  $f_j(x_{j+1}, u_j)$  и рекуррентные соотношения. Пусть

$$\varphi_j(u_j) = au_j^2 + bu_j + c,$$

$\varphi_j(u_j)$  — затраты на производство (закупку)  $u_j$  единиц продукции на этапе  $j$ ;

$h_j$  — затраты на хранение единицы запаса, переходящей из этапа  $j$  в этап  $j + 1$ .

Тогда затраты на производство и хранение на этапе  $j$  равны

$$f_j(x_{j+1}, u_j) = \varphi_j(u_j) + h_j x_{j+1} = au_j^2 + bu_j + c + h_j x_{j+1}.$$

Выведенные ранее рекуррентные соотношения динамического программирования для решения задачи управления производством и запасами в нашем случае принимают вид

$$F_k(x_{k+1}) = \min_{u_k} \{au_k^2 + bu_k + c + h_k x_{k+1} + F_{k-1}(x_k)\}, \quad (7.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} k &= 2, 3, 4, \dots, n, \\ 0 &\leq x_{k+1} \leq d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_n, \\ 0 &\leq u_k \leq d_k + x_{k+1}, \\ x_k &= x_{k+1} + d_k - u_k. \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Если же  $k = 1$ , то

$$F_1(x_2) = \min_{x_1} \{au_1^2 + bu_1 + c + h_1 x_2\}, \quad (7.2.11)$$

$$0 \leq x_2 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n, \quad (7.2.12)$$

$$0 \leq u_1 \leq d_1 + x_2, \quad (7.2.13)$$

$$x_1 + u_1 - d_1 = x_2.$$

Остается заметить, что полезно обозначить выражение в фигурных скобках в (7.2.9) через

$$W_k(x_{k+1}, u_k) = au_k^2 + bu_k + c + h_k x_{k+1} + F_{k-1}(x_k)$$

и записать рекуррентное соотношение (7.2.9) в виде

$$F_k(x_{k+1}) = \min_{u_k} W_k(x_{k+1}, u_k), \quad (7.2.14)$$

где минимум берется по целочисленной переменной  $u_k$ , удовлетворяющей условию (7.2.10).

**ПРИМЕР 7.2.1.** Рассматривается трехэтапная система управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом. Заявки потребителей на продукцию составляют: на первый этап  $d_1 = 3$  единицы, на второй —  $d_2 = 2$ , на третий —  $d_3 = 4$  единицы. К началу первого этапа на складе имеется 2 единицы продукции, т. е. начальный уровень запаса равен  $y_1 = 2$ . Затраты на хранение единицы продукции на разных этапах различны и составляют соответственно  $h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 2$  ден. ед. Затраты на производство  $u_j$  единиц продукции на  $j$ -м этапе определяются функцией

$$\varphi_j(u_j) = u_j^2 + 5u_j + 2, \quad j = 1, 2, 3,$$

т. е.  $a = 1, b = 5, c = 2$ . Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были

удовлетворены, а суммарные затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими.

**РЕШЕНИЕ.** Воспользовавшись рекуррентными соотношениями, последовательно вычисляем  $F_1(x_2), F_2(x_3), F_3(x_4)$  и соответственно находим  $u_1^*(x_2), u_2^*(x_3), u_3^*(x_4)$ .

Положим  $k = 1$ . Согласно (7.2.11) имеем

$$F_1(x_2) = \min_{u_1} \{u_1^2 + 5u_1 + 2 + x_2\}.$$

Учтем, что согласно (7.2.12) параметр состояния  $x = x_2$  может принимать целые значения на отрезке

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_2 \leq d_2 + d_3, \\ 0 &\leq x_2 \leq 2 + 4, \end{aligned}$$

т. е.

$$x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

При этом, вообще говоря, каждому значению параметра состояния должна отвечать определенная область изменения управления  $u_1$ , характеризующая условием (7.2.13)

$$0 \leq u_1 \leq 3 + x_2.$$

Однако объем производства на первом этапе  $u_1$  не может быть меньше единицы, так как спрос  $d_1 = 3$ , а исходный запас  $x_1 = 2$ . Кроме того, из балансового уравнения

$$x_1 + u_1 - d_1 = x_2$$

непосредственно следует, что объем производства связан со значением параметра состояния  $x = x_2$  соотношением

$$u_1 = x_2 + d_1 - x_1 = x_2 + 3 - 2 = x_2 + 1. \quad (7.2.15)$$

В этом и состоит особенность первого этапа. Если задан уровень запаса к началу первого этапа, то каждому значению  $x_2$  отвечает единственное значение  $u_1$ , и потому

$$F_1(x_2) = W_1(x_2, u_1).$$

Придавая  $x_2$  различные целые значения от 0 до 6 и учитывая (7.2.15), находим:

$$x_2 = 0, u_1 = 0 + 1 = 1, \Omega_1(1, 0) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 1 \cdot 0 = 8,$$

$$x_2 = 1, u_1 = 1 + 1 = 2, \Omega_1(2, 1) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 1 = 17,$$

и т.д. Значения функции состояния  $F_1(x_2)$  представлены в табл. 7.2.1.

Таблица 7.2.1

$x = x_2$	0	1	2	3	4	5	6
$F_1(x_2)$	8	17	28	41	56	73	92
$u_1^*(x_2)$	1	2	3	4	5	6	7

Переходим ко второму этапу. Полагаем  $k = 2$  и табулируем функцию  $F_2(x_3)$  с помощью соотношения (7.2.14):

$$\begin{aligned} F_2(x_3) &= \min_{u_2} W_2(x_3, u_2) = \min_{u_2} \{a u_2^2 + b u_2 + c + h_2 x_3 + F_1(x_2)\} = \\ &= \min_{u_2} \{u_2^2 + 5 u_2 + 2 + 3 x_3 + F_1(x_2)\}. \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

Здесь минимум берется по единственной переменной  $u_2$ , которая может изменяться, согласно (7.2.10), в пределах

$$0 \leq u_2 \leq d_2 + x_3 \quad \text{или} \quad 0 \leq u_2 \leq 2 + x_3 \quad (7.2.17)$$

где верхняя граница зависит от параметра состояния  $x = x_3$ , который, согласно (7.2.8), принимает значения на отрезке

$$0 \leq y_3 \leq d_3, \quad \text{т. е.} \quad 0 \leq y_3 \leq 4,$$

а аргумент  $x_2$  в последнем слагаемом справа в соотношении (7.2.16) связан с  $x_3$  и  $u_2$  балансовым уравнением

$$x_2 + u_2 - d_2 = x_3,$$

откуда следует, что

$$x_2 = x_3 + d_2 - u_2 = x_3 + 2 - u_2. \quad (7.2.18)$$

Придавая параметру состояния  $x = x_3$  различные значения от 0 до 4, будем последовательно вычислять  $W_2(x, u_2)$ , а затем определять  $F_2(x)$  и  $u_2^*(x)$ . Положим, например,  $x = x_3 = 2$ . Тогда, согласно (7.2.17),

$$0 \leq u_2 \leq 4,$$

т. е. управление  $u_2$  может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, и каждому значению  $u_2$  отвечает определенное значение  $x_2$ , вычисляемое по формуле (7.2.18):

$$x_2 = 4 - u_2.$$

Последовательно вычисляем:

если  $u_2 = 0$ , то  $x_2 = 4 - 0 = 4$ ,  $W_2(2, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(4) = 8 + 56 = 64$ ,

$$\begin{aligned}
u_2 = 1, \quad x_2 = 4 - 1 = 3, \quad W_2(2, 1) &= 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(3) = 14 + 41 = 55, \\
u_2 = 2, \quad x_2 = 4 - 2 = 2, \quad W_2(2, 2) &= 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(2) = 22 + 28 = 50, \\
u_2 = 3, \quad x_2 = 4 - 3 = 1, \quad W_2(2, 3) &= 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(1) = 32 + 17 = \boxed{49}, \\
u_2 = 4, \quad x_2 = 4 - 4 = 0, \quad W_2(2, 4) &= 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 2 + F_1(0) = 44 + 8 = 52.
\end{aligned}$$

Наименьшее из полученных значений  $W_2$  — это  $F_2(2)$ , т. е.

$$F_2(x_3 = 2) = \min_{u_2} W_2(2, u_2) = \min\{64, 55, 50, 49, 52\} = 49,$$

причем минимум достигается при значении  $u_2$ , равном

$$u_2^*(x_3 = 2) = 3.$$

Аналогично для значения параметра  $x = x_3 = 3$ , проведя необходимые вычисления, найдем

$$F_2(x_3 = 3) = 63, \quad u_2^*(x_3 = 3) = 3.$$

Процесс табулирования функции  $F_2(x_3)$  приведен в табл. 7.2.2, а результаты табулирования сведены в табл. 7.2.3.

Переходим к следующему этапу. Полагаем  $k = 3$  и табулируем функцию  $F_3(x_4)$ :

$$F_3(\xi = y_4) = \min_{x_3} \{ax_3^2 + bx_3 + c + h_3 y_4 + F_2(y_3)\}.$$

Вычисляем значение функции состояния только для одного значения аргумента  $x = x_4 = 0$ , так как не хотим оставлять продукцию в запас в конце исследуемого периода. Процесс вычислений приведен в табл. 7.2.4. Получаем

$$F_3(x_4 = 0) = \min_{u_3} W_3(0, u_3) = \min\{80, 71, 65, 62, 62\} = 62,$$

причем минимум достигается при двух значениях переменной  $u_3$ , равных

$$u_3^*(x_4 = 0) = 3 \quad \text{или} \quad u_3^{**}(x_4 = 0) = 4.$$

Таким образом, мы получили не только минимальные общие затраты на производство и хранение продукции, но и оптимальное управление на последнем шаге:  $u_3^* \in \{3, 4\}$ .

Рассмотрим случай, когда на последнем этапе планируется выпускать три единицы продукции:

$$u_3^* = 3.$$

Остальные компоненты оптимального решения найдем по обычным правилам метода динамического программирования.

Чтобы найти предпоследнюю компоненту, учтем, что

$$x_3 + u_3 - d_3 = x_4 \quad \text{или} \quad 3 + x_3 - 4 = 0,$$

откуда

$$x_3 = 1.$$

Таблица 7.2.2

$0 \leq x_{k+1} \leq \sum_{j=k+1}^n d_j$	$x = x_{k+1}$	$0 \leq u_k \leq d_k + x_{k+1}$	$u_k$	$x_k = x_{k+1} + d_k - u_k$	$W_k(x_{k+1}, u_k) = \varphi_k(u_k) + h_k x_{k+1} + F_{k-1}(x_k)$
$0 \leq x_3 \leq d_3$	$x = x_3$	$0 \leq u_2 \leq d_2 + x_3$	$x_2$	$x_2 = x_3 + d_2 - u_2$	$W_2(x_3, u_2) = au_2^2 + bu_2 + c + h_2 x_3 + F_1(x_2)$
$0 \leq x_3 \leq 4$	$\xi = y_3$	$0 \leq u_2 \leq 2 + x_3$	$u_2$	$x_2 = x_3 + 2 - u_2$	$W_2(x_3, u_2) = u_2^2 + 5u_2 + 2 + 3x_3 + F_1(x_2)$
	$x_3 = 0$	$0 \leq u_2 \leq 2$	$u_2 = 0$ $u_2 = 1$ $u_2 = 2$	$x_2 = 2 - 0 = 2$ $x_2 = 2 - 1 = 1$ $x_2 = 2 - 2 = 0$	$W_2(0, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 0 + F_1(2) = 2 + 28 = 30$ $W_2(0, 1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 0 + F_1(1) = 8 + 17 = 25$ $W_2(0, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 0 + F_1(0) = 16 + 8 = \boxed{24}$
	$x_3 = 1$	$0 \leq u_2 \leq 3$	$u_2 = 0$ $u_2 = 1$ $u_2 = 2$ $u_2 = 3$	$x_2 = 3 - 0 = 3$ $x_2 = 3 - 1 = 2$ $x_2 = 3 - 2 = 1$ $x_2 = 3 - 3 = 0$	$W_2(1, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 1 + F_1(3) = 5 + 41 = 46$ $W_2(1, 1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 1 + F_1(2) = 11 + 28 = 39$ $W_2(1, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 1 + F_1(1) = 19 + 17 = \boxed{36}$ $W_2(1, 3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 1 + F_1(0) = 29 + 8 = 37$
	$x_3 = 2$	...	...	...	...
	$x_3 = 3$	$0 \leq u_2 \leq 5$	$u_2 = 0$ $u_2 = 1$ $u_2 = 2$ $u_2 = 3$ $u_2 = 4$ $u_2 = 5$	$x_2 = 5 - 0 = 5$ $x_2 = 5 - 1 = 4$ $x_2 = 5 - 2 = 3$ $x_2 = 5 - 3 = 2$ $x_2 = 5 - 4 = 1$ $x_2 = 5 - 5 = 0$	$W_2(3, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(5) = 11 + 73 = 84$ $W_2(3, 1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(4) = 17 + 56 = 73$ $W_2(3, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(3) = 25 + 41 = 66$ $W_2(3, 3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(2) = 35 + 28 = \boxed{63}$ $W_2(3, 4) = 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(1) = 47 + 17 = 64$ $W_2(3, 5) = 5^2 + 5 \cdot 5 + 2 + 3 \cdot 3 + F_1(0) = 61 + 8 = 69$
	$x_3 = 4$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$u_2 = 0$ $u_2 = 1$ $u_2 = 2$ $u_2 = 3$ $u_2 = 4$ $u_2 = 5$ $u_2 = 6$	$x_2 = 6 - 0 = 6$ $x_2 = 6 - 1 = 5$ $x_2 = 6 - 2 = 4$ $x_2 = 6 - 3 = 3$ $x_2 = 6 - 4 = 2$ $x_2 = 6 - 5 = 1$ $x_2 = 6 - 6 = 0$	$W_2(4, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(6) = 14 + 92 = 106$ $W_2(4, 1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(5) = 20 + 73 = 93$ $W_2(4, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(4) = 28 + 56 = 84$ $W_2(4, 3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(3) = 38 + 41 = 79$ $W_2(4, 4) = 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(2) = 50 + 28 = \boxed{78}$ $W_2(4, 5) = 5^2 + 5 \cdot 5 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(1) = 64 + 17 = 81$ $W_2(4, 6) = 6^2 + 5 \cdot 6 + 2 + 3 \cdot 4 + F_1(0) = 80 + 8 = 88$

Таблица 7.2.3

$x = x_3$	0	1	2	3	4
$F_2(x = x_3)$	24	36	49	63	78
$u_2^*(x = x_3)$	2	2	3	3	4

Таблица 7.2.4

$0 \leq x_{k+1} \leq \sum_{j=k+1}^n d_j$	$x = x_{k+1}$	$0 \leq u_k \leq d_k + x_{k+1}$	$u_k$	$x_k = x_{k+1} + d'_k - u_k$	$W_k(x_{k+1}, u_k) = \varphi_k(u_k) + h_k x_{k+1} + F_{k-1}(x_k)$
$0 \leq x_4 \leq 0$	$x = x_4$	$0 \leq u_3 \leq d_3 + x_4$	$u_3$	$x_3 = x_4 + d_3 - u_3$	$W_3(x_4, u_3) = au_3^2 + bu_3 + c + h_3 x_4 + F_2(x_3)$
$y_4 = 0$	$x = x_4$	$0 \leq u_3 \leq 4$	$u_3$	$x_3 = x_4 + d_3 - u_3$	$W_3(x_4, u_3) = au_3^2 + bu_3 + c + h_3 x_4 + F_2(x_3)$
	$x_4 = 0$	$0 \leq u_3 \leq 4$	$u_3 = 0$ $u_3 = 1$ $u_3 = 2$ $u_3 = 3$ $u_3 = 4$	$x_3 = 4 - 0 = 4$ $x_3 = 4 - 1 = 3$ $x_3 = 4 - 2 = 3$ $x_3 = 4 - 3 = 1$ $x_3 = 4 - 4 = 0$	$W_3(0, 0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(4) = 2 + 78 = 80$ $W_3(0, 1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(3) = 8 + 63 = 71$ $W_3(0, 2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(2) = 16 + 49 = 65$ $W_3(0, 3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(1) = 26 + 36 = 62$ $W_3(0, 4) = 4^2 + 5 \cdot 4 + 2 + 3 \cdot 0 + F_2(0) = 38 + 24 = 62$

Таблица 7.2.5

Этап	январь	февраль	март	Итого за 3 месяца
Имеем продукции к началу месяца, шт.	$x_1 = 2$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$	$x_1 = 2$
Производим в течение месяца, шт.	$u_1 = 2$	$u_2 = 2$	$u_3 = 3$	$u_1 + u_2 + u_3 = 7$
Отпускаем заказчикам, шт.	$d_1 = 3$	$d_2 = 2$	$d_3 = 4$	$d_1 + d_2 + d_3 = 9$
Остаток к концу месяца (храним в течение текущего месяца), шт.	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 0$	—
Затраты на производство, руб.	$\varphi(u_1) = 16$	$\varphi(u_2) = 16$	$\varphi(u_3) = 26$	$\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3) = 58$
Затраты на хранение, руб.	$h_1 x_2 = 1$	$h_2 x_3 = 3$	0	$h_1 x_2 + h_2 x_3 = 4$

Из табл. 7.2.3 значений  $u_2^*(x_3)$  находим

$$u_2^* = u_2^*(x_3 = 1) = 2.$$

Аналогично, продолжая двигаться в обратном направлении и учитывая, что

$$x_2 + u_2 - d_2 = x_3 \quad \text{или} \quad 2 + x_2 - 2 = 1,$$

получаем

$$x_2 = 1;$$

из табл. 7.2.2 значений  $u_1^*(x_2)$  находим

$$u_1^* = u_1^*(x_2 = 1) = 2.$$

Итак, оптимальный план производства имеет вид

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 3,$$

а минимальные общие затраты составляют 62 единицы.

Полезна с а м о п р о в е р к а полученного результата. Для этого по исходным данным и найденному плану производства заполняем табл. 7.2.5 и убеждаемся, что заявки потребителей на каждом этапе выполняются:

$$\begin{aligned} x_1 + u_1 &\geq d_1, & x_2 + u_2 &\geq d_2, & x_3 + u_3 &\geq d_3, \\ 2 + 2 &\geq 3, & 1 + 2 &\geq 2, & 1 + 3 &\geq 4, \end{aligned}$$

и что суммарный объем производства и имевшегося к началу первого этапа запаса продукции равен суммарной потребности

$$\begin{aligned} x_1 + u_1 + u_2 + u_3 &= d_1 + d_2 + d_3, \\ 2 + 2 + 2 + 3 &= 3 + 2 + 4, \end{aligned}$$

причем это достигается при наименьших возможных затратах на производство и хранение продукции:

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3) + h_1 x_2 + h_2 x_3 &= F_3(x_4 = 0), \\ 16 + 16 + 26 + 1 + 4 &= 62. \end{aligned}$$

Читателю рекомендуется найти другой вариант оптимальной производственной программы, когда на последнем этапе предполагается произвести четыре единицы продукции, и выполнить самопроверку.  $\square$

### § 7.3. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ

*Акция* — это доленое обязательство: ее обладатель получает право долевого участия в управлении акционерной компанией, выпустившей эти акции (каждой акции соответствует определенное число голосов на ежегодном общем собрании акционеров — высшем органе управления компанией), в активах и прибылях (дивидендах) этой компании.

Рассмотрим ценообразование акций в рамках **биномиальной модели Кокса — Росса — Рубинштейна**.

Предположим для простоты, что на рынке обращается одна акция, и ее стоимость в конце периода времени  $t$  составляет  $S_t$ .

Предположим также, что инвестор имеет возможность:

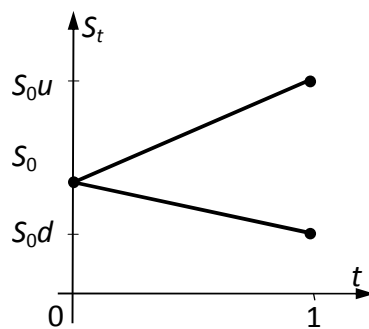
- размещать средства на банковском счете и брать с него в долг;
- покупать и продавать акции.

Тогда для этого инвестора на рынке существует **безрисковый актив** (банковский счет)  $B$  и **рисковый актив** (акция)  $S$ .

Будем считать, что на банковский счет начисляются проценты с **эффективной ставкой**  $i$ : год делится на  $n$  периодов, проценты за часть года вычисляются как простые, а накапливаются как сложные, так что за время  $T > 0$  сумма на счете увеличивается в  $(1 + i/n)^{[nT]}$  раз (квадратными скобками обозначена целая часть числа):  $B_t = B_0(1 + i/n)^{[nT]}$ .

Будем предполагать, что **операционные издержки**, связанные с переводом средств между активами, отсутствуют, а также что активы являются **безгранично делимыми**, т. е. можно купить и продать любую часть акции, положить на счет и снять с него любую его часть.

Предположим вначале, что в течение года проценты начисляются один раз, а стоимость акции может увеличиться в  $u$  раз или увеличиться в  $d$  раз (уменьшиться в  $1/d$  раз), причем  $d < 1 < 1 + i < u$  (рис. 7.3.1).



**Рис. 7.3.1.** Изменение цены акции за один год

На **идеальном рынке** отсутствуют **арбитражные возможности**, т. е. невозможно извлечь безрисковый доход, больший чем процент, начисляемый на банковский счет.

Предположение о том, что на рынке отсутствуют арбитражные возможности, означает, что математическое ожидание цены акции на таком рынке к концу года  $MS_1$  должно совпадать с суммой, которая оказалась бы на банковском счете к концу года, если бы сумма  $S_0$  была в начале года положена на банковский счет, т. е. с суммой  $S_0(1 + i)$ :

$$MS_1 = S_0(1 + i).$$

Истинные вероятности того, что в течение данного периода акция подорожает или подешевеет, нам неизвестны, но в предположении отсут-

ствия арбитражных возможностей можно с помощью только что полученного условия вычислить так называемые *вероятности, нейтральные к риску*: пусть  $p$  — вероятность того, что в начале следующего периода цена акции окажется равной  $S_0u$ , тогда вероятность того, что цена акции будет равна  $S_0d$ , составит  $(1 - p)$ ; при этом

$$MS_1 = S_0up + S_0d(1 - p).$$

Отсюда

$$S_0up + S_0d(1 - p) = S_0(1 + i).$$

Разделим обе части этого равенства на  $S_0$ :

$$up + d(1 - p) = 1 + i \quad \text{или} \quad (u - d)p + d = 1 + i,$$

поэтому

$$p = \frac{1 + i - d}{u - d}. \quad (7.3.1)$$

Предположим теперь, что проценты на банковский счет начисляются  $n > 1$  раз в год, и в каждом периоде начисления процентов стоимость акции может увеличиться в  $u$  или в  $d$  раз. Вероятность того, что стоимость акции увеличится в  $u$  или в  $d$  раз, неизвестна, однако можно вновь воспользоваться принципом вероятности, нейтральной к риску.

При этом процентная ставка будет скорректирована: за  $n$ -ю часть года начисляется процент  $i/n$ , т. е. в числителе формулы (7.3.1) вместо  $(1 + i)$  будет  $(1 + i/n)$ :

$$p_{(n)} = \frac{1 + i/n - d}{u - d} \quad (7.3.2)$$

[индекс  $(n)$  здесь означает, что проведена коррекция годовой ставки с учетом того, что год разбивается на  $n$  периодов].

Процесс изменения цены акции в течение года проиллюстрирован рис. 7.3.2. Этот процесс можно представить как последовательность  $n$  независимых испытаний, в которых успехом считается повышение цены акции в  $u$  раз, а неудачей — ее понижение в  $1/d$  раз. Если в течение  $n$  периодов цена акции поднималась  $k$  раз и опускалась  $(n - k)$  раз, то ее цена к концу последнего периода составит  $s_k = S_0u^k d^{n-k}$ . Вероятность наступления  $k$  повышений и  $(n - k)$  понижений цены акции составит по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Вероятность успеха  $p$  здесь имеет смысл оценить с помощью нейтральной к риску вероятности  $p_{(n)}$ , определяемой формулой (7.3.2). Таким образом, цена акции к концу года может принимать значения

$$s_k = S_0u^k d^{n-k}$$

с вероятностями

$$P\{S_T = S_0u^k d^{n-k}\} = C_n^k p_{(n)}^k (1 - p_{(n)})^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.3.3)$$

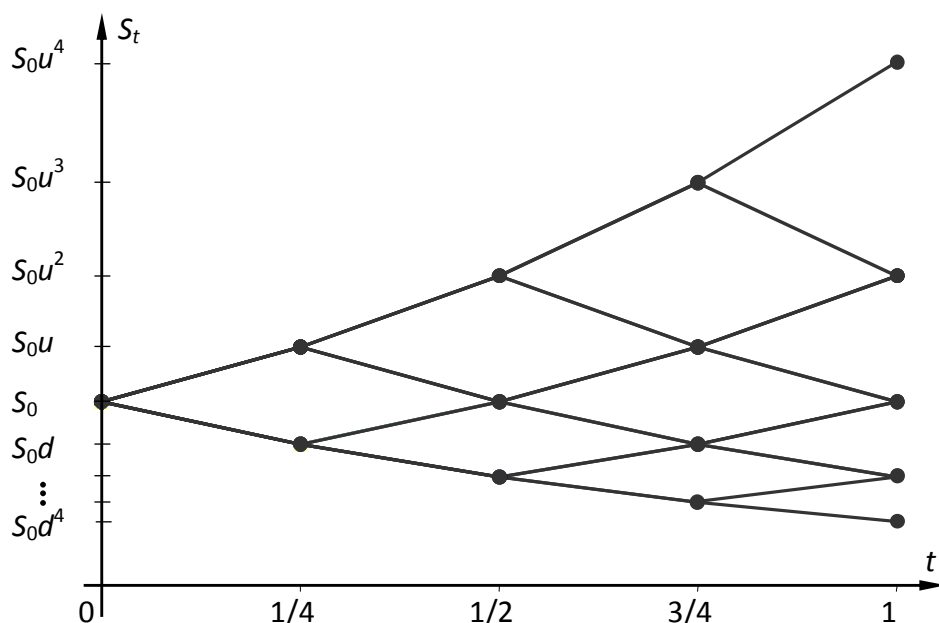


Рис. 7.3.2. Изменение цены акции в течение четырех периодов

**ПРИМЕР 7.3.1.** Требуется составить ряд распределения цены акции к концу года, разбив этот год на четыре периода, если текущая цена акции составляет  $S_0 = 35$  руб., годовая безрисковая процентная ставка составляет  $i = 9,6\%$  и известно, что в каждом периоде акция может возрасти в цене или упасть в цене в  $u = 1,105$  раз.

**Решение.** Вероятность, нейтральная к риску,

$$p_{(4)} = \frac{1 + i/4 - d}{u - d} = \frac{1,024 - 0,905}{1,105 - 0,905} \approx 0,595, \quad 1 - p_{(4)} \approx 0,405$$

(здесь  $d = 1/u = 1/1,105 \approx 0,905$ ).

Теперь мы можем составить ряд распределения цены акции к концу четвертого периода: цена принимает значения

$$S_0 u^k d^{4-k}$$

соответственно с вероятностями

$$\mathbf{P}_4(k) = C_4^k p_{(4)}^k (1 - p_{(4)})^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Окончательно имеем:

$S_1$	23,48	28,66	35,00	42,74	52,18
$p$	0,027	0,158	0,348	0,341	0,125

□

Банковский счет, акции и облигации называются *основными финансовыми инструментами*. На их базе могут быть построены более сложные финансовые инструменты — *производные*.

Наиболее распространенные типы производных финансовых инструментов — форварды и опционы.

*Опцион* — это ценная бумага, представляющая собой договор, эмитент которого получает от держателя определенную премию, и за это держатель получает право (но не обязанность) в течение срока, оговоренного в условиях опциона, либо купить у эмитента определенный актив по фиксированной цене, определенной в договоре и называемой *терминальной стоимостью* (такой опцион называется *опционом покупателя*), либо продать актив эмитенту по терминальной стоимости (такой опцион называется *опционом продавца*).

По срокам исполнения опционы делятся на европейские и американские. *Американский опцион* может быть предъявлен к исполнению в любое время до истечения срока опциона, *европейский опцион* может быть использован только в день истечения его срока.

Рассмотрим **ценообразование европейских опционов** в рамках биномиальной модели.

*Рациональной* считается такая стоимость финансового инструмента, которая исключает возможность арбитража без риска; иными словами, доходность безрискового финансового инструмента, имеющего рациональную стоимость, должна совпадать с доходностью банковского счета.

Найдем рациональную стоимость  $C_T$  стандартного европейского опциона покупателя. Очевидно, рациональная стоимость опциона в момент его исполнения совпадает с прибылью, которую можно получить, исполнив опцион. Данный опцион имеет смысл исполнять, т. е. пользоваться заложенным в нем правом покупки акции по цене  $X$ , лишь в том случае, когда рыночная цена  $S_T$  этой акции к моменту окончания срока действия опциона, т. е. к концу последнего периода, будет больше  $X$ . Если рыночная цена акции  $S_T$  окажется больше  $X$ , держатель опциона, исполнив его, получит доход  $(S_T - X)$ . Если же рыночная цена акции  $S_m$  окажется меньше  $X$ , держатель опциона просто не будет его исполнять и получит нулевой доход. Таким образом, если цена акции в момент исполнения опциона известна и равна  $S_T$ , то доход от исполнения такого опциона составит  $C = \max\{S_T - X; 0\}$ . Поскольку цена акции  $S_T$  является случайной величиной, определяемой рядом распределения (7.3.3), доход от исполнения опциона покупателя также является случайной величиной, которая принимает значения

$$c_k = \max\{S_0 u^k d^{m-k} - X; 0\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

с вероятностями

$$P_m(k) = C_m^k p_{(n)}^k (1 - p_{(n)})^{m-k}.$$

Оценка опциона происходит перед началом первого периода, поэтому для получения его рациональной стоимости  $C_T$  достаточно дисконтировать ожидаемый доход от исполнения опциона на срок его действия:

$$\hat{C}_T = \frac{MC}{(1+i/n)^{[nT]}} = \frac{\sum_{k=0}^{[nT]} \max\{S_0 u^k d^{[nT]-k} - X; 0\} C_{[nT]}^k p_{(n)}^k (1-p_{(n)})^{[nT]-k}}{(1+i/n)^{[nT]}}. \quad (7.3.4)$$

**ПРИМЕР 7.3.2.** Требуется определить рациональную стоимость европейского опциона покупателя с терминальной стоимостью  $X = 40$  руб. и сроком исполнения 1 год, выпущенного на акцию из условия примера 7.3.1.

**Решение.** Ряд распределения дохода от исполнения опциона при расчетах по четырехпериодной биномиальной модели имеет следующий вид:

$C_1$	0,00	2,74	12,18
$p$	$0,027 + 0,158 + 0,348 = 0,533$	0,341	0,125

Ожидаемый доход от исполнения опциона покупателя, равный математическому ожиданию случайной величины  $C_1$ , составляет

$$MC = \sum_{k=0}^4 \max\{S_0 u^k d^{4-k} - X; 0\} C_4^k p_{(4)}^k (1-p_{(4)})^{4-k} =$$

$$= 0 \cdot 0,027 + 0 \cdot 0,158 + 0 \cdot 0,348 + 2,737 \cdot 0,341 + 12,182 \cdot 0,126 = 2,456.$$

Окончательно получаем, что

$$\hat{C}_T = \frac{MC}{(1+i/4)^4} = \frac{2,456}{1,024^4} \approx 2,23 \text{ руб.},$$

т. е. рациональная стоимость такого опциона равна 2 руб. 23 коп. (что существенно меньше текущей цены акции и цены исполнения опциона!).  $\square$

На реальном рынке продавцу опциона выгодны цены, не меньшие рациональной стоимости опциона, а покупателю — не бóльшие.

Успех зависит от скорости и качества получения информации и принятия решения. Предположим, что инвестор А получил ту же информацию и провел те же расчеты, что в примерах 7.3.1—7.3.2, и в результате нашел рациональную стоимость опциона, равную 2 руб. 23 коп. Предположим, что другой инвестор Б получил информацию по своим каналам и провел расчеты с другой степенью точности, получив в результате свое значение рациональной стоимости данного опциона — например, 7 руб. 15 коп. Если они договорятся, что Б купит у А 10 000 таких опционов, скажем, по 4 руб., то в момент подписания сделки оба будут чрезвычайно довольны собой (А считает, что продал опционы дороже, чем они стоят на самом деле, а Б думает, что ему удалось купить опционы дешевле их рациональной цены). Но на самом деле выиграет из них кто-то один — это станет ясно в момент исполнения! Такова типичная иллюстрация деятельности на финансовых рынках, где финансовые потоки текут от тех, кто не успевает быстро принимать правильные решения, к тем, кто успевает это делать. И если несколько сотен (и даже десятков) лет назад определяющую роль играла скорость получения информации, то прогресс в области ин-

формационных технологий перенес «борьбу» инвесторов в область проведения быстрых и аккуратных расчетов и принятия решений.

**ТЕОРЕМА О ПАРИТЕТЕ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ ПОКУПАТЕЛЯ И ПРОДАВЦА.**

*Пусть одновременно заключаются два опционных контракта (опцион покупателя и опцион продавца) с одной и той же ценой исполнения  $X$  и одним и тем же сроком исполнения  $T$  на одну и ту же акцию, стоимость которой в начальный момент равна  $S_0$ , годовая эффективная процентная ставка при  $n$  начислениях процентов в году равна  $i$ . Тогда рациональные стоимости этих опционов  $\mathbb{C}_T$  и  $\mathbb{P}_T$  связаны равенством*

$$\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0 = \frac{X}{(1 + i/n)^{[nT]}}. \quad (7.3.5)$$

**Доказательство.** Пусть одновременно заключаются два опционных контракта (опцион покупателя и опцион продавца) с одной и той же ценой исполнения  $X$  и одним и тем же сроком исполнения  $T$  на одну и ту же акцию, стоимость которой в начальный момент равна  $S_0$ , банковская (годовая) процентная ставка равна  $i$  и пусть  $\mathbb{C}_T$  и  $\mathbb{P}_T$  — рациональные стоимости этих опционов.

Рациональность стоимости означает, что из инструментов с такой стоимостью невозможно создать безрисковый портфель, доходность которого превысит безрисковую доходность. Если

$$\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0 > \frac{X}{(1 + i/n)^{[nT]}},$$

то для получения безрисковой прибыли можно использовать следующую торговую стратегию: одновременно продать акцию, продать опцион продавца на нее и купить опцион покупателя. Тогда в начальный момент времени будет получена сумма  $\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0$ , а в момент исполнения опционов необходимо будет выплатить сумму  $X$ , современная ценность которой составляет  $X/(1 + i/n)^{[nT]}$ . Таким образом, будет получен выигрыш по сравнению с безрисковыми вложениями в банковский счет, что противоречит предположению о рациональности стоимости опционов. Аналогично, если  $\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0$  будет меньше, чем  $X/(1 + i/n)^{[nT]}$ , то для получения безрисковой прибыли можно использовать следующую торговую стратегию: купить акцию, купить опцион продавца на нее и продать опцион покупателя. Тогда в начальный момент времени будет выплачена сумма  $\mathbb{P}_T - \mathbb{C}_T + S_0$ , а в момент исполнения опционов — получена сумма  $X$ , современная ценность которой составляет  $X/(1 + i/n)^{[nT]}$ , т. е. данная стратегия принесет выигрыш по сравнению с безрисковыми вложениями в банковский счет, что противоречит предположению о рациональной стоимости опционов. Полученные противоречия доказывают теорему.  $\square$

Отметим, что соотношение паритета (7.3.5) справедливо только для европейских опционов.

**ПРИМЕР 7.3.3.** Требуется найти рациональную стоимость европейского опциона продавца с терминальной стоимостью  $X = 40$  руб. и сроком исполнения 1 год, выпущенного на акцию из условия примера 7.3.1.

**Решение.** По теореме о паритете опционов покупателя и продавца

$$\mathbb{P}_T - C_T + S_0 = \frac{X}{(1+i/n)^{[nT]}},$$

откуда

$$\mathbb{P}_1 = 2,23 - 35 + \frac{40}{1,024^4} \approx 3,61,$$

т. е. рациональная стоимость такого опциона равна 3 руб. 61 коп.

Можно рациональную стоимость европейского опциона продавца найти и другим способом — по ряду распределения дохода от его исполнения

$P_1$	16,52	11,34	5,00	0,00
$p$	0,027	0,158	0,348	0,467

Находим математическое ожидание дохода от исполнения опциона:

$$MP_1 = 16,52 \cdot 0,027 + 11,33 \cdot 0,158 + 5,00 \cdot 0,348 + 0 \cdot 0,467 = 3,98.$$

и дисконтируем его на срок его действия:

$$\mathbb{P}_1 = \frac{MP_1}{(1+i/4)^4} = \frac{3,969}{1,024^4} \approx 3,61 \text{ руб. } \square$$

Перейдем к рассмотрению ценообразования **американских опционов**. Оказывается, американский опцион покупателя может быть выгодно исполнять только в последний момент срока его действия. Это влечет справедливость следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЕВРОПЕЙСКИХ И АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ ПОКУПАТЕЛЯ.** *Рациональная стоимость американского опциона покупателя совпадает с рациональной стоимостью аналогичного европейского опциона покупателя.*

Однако американский опцион продавца часто бывает выгодно исполнить досрочно, поэтому его рациональная стоимость может оказаться такой же, как у соответствующего европейского опциона (если досрочное исполнение окажется невыгодным) или выше (если будет выгоднее исполнить опцион досрочно).

Это приводит к тому, что **теорема о паритете** для американских опционов превращается в неравенство

$$\mathbb{P}_T^{(\text{амер.})} - C_T^{(\text{амер.})} + S_0 \geq \frac{X}{(1+i/n)^{[nT]}}.$$

Для оценки рациональной стоимости американских опционов продавца обычно пользуются **методом динамического программирования**.

В самом деле, в биномиальной модели процесс изменения цены акции распадается на  $n$  периодов (этапов), поэтому процесс планирования

управления процессом владения американским опционом продавца (которое с содержательной точки зрения состоит в том, что на каждом шаге лицо, принимающее решение, определяет, имеет ли смысл исполнить опцион досрочно или лучше подождать) является **многошаговым**, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

При этом начальное состояние процесса (начальная цена акции) нам известно, и управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех **возможных** будущих значений цены акции, а **последний шаг** планируется «без оглядки на будущее», поскольку американский опцион должен быть исполнен до окончания срока его исполнения, т. е. до окончания последнего шага.

**ПРИМЕР 7.3.4.** Нужно определить рациональную стоимость американского опциона покупателя с терминальной стоимостью  $X = 40$  руб. и сроком исполнения 1 год, выписанного на акцию из условия примера 7.3.1.

**Решение.** По теореме эквивалентности европейских и американских опционов покупателя рациональная стоимость рассматриваемого опциона равна 2 руб. 24 коп. (согласно решению примера 7.3.2).

Убедимся в том, что американский опцион покупателя невыгодно исполнять досрочно. Изобразим на рис. 7.3.3 дерево возможных цен акции. Справа от каждой вершины (которые пронумеруем двумя индексами, первый индекс означает номер периода, а второй — номер возможного значения цены акции) на **сером фоне** укажем цену акции, а рядом с ней **белыми цифрами на черном фоне** напомним величину дохода, который можно получить, исполнив опцион немедленно. Например, если акция стоит 47 руб. 22 коп. (в вершине 34), то немедленное исполнение американского опциона покупателя принесет доход 7 руб. 22 коп., а если акция стоит 38 руб. 68 коп. (в вершине 33), то немедленное исполнение опциона невыгодно совершенно (он не принесет дохода вообще).

Предположим, что изменение цены акции привело к достижению вершины 34 (когда акция стоит 47 руб. 22 коп.). Если исполнить опцион немедленно, то можно получить доход в размере 7 руб. 22 коп., если же подождать, как будут развиваться события дальше, то возможны два варианта:

- либо цена акции увеличится до 52 руб. 18 коп. (с вероятностью 0,595), и тогда держатель опциона получит доход в размере 12 руб. 18 коп.,
- либо цена акции понизится до 42 руб. 74 коп. (с вероятностью 0,405), и тогда держатель опциона получит доход в размере 2 руб. 74 коп.

Ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем равен

$$12,18 \cdot 0,595 + 2,74 \cdot 0,405 = 8,36.$$

Поскольку этот доход будет получен только через один период, дисконтируем его на четверть года — для сравнения с доходом от немедленного исполнения опциона:

$$\frac{8,36}{1,024} = 8,16.$$

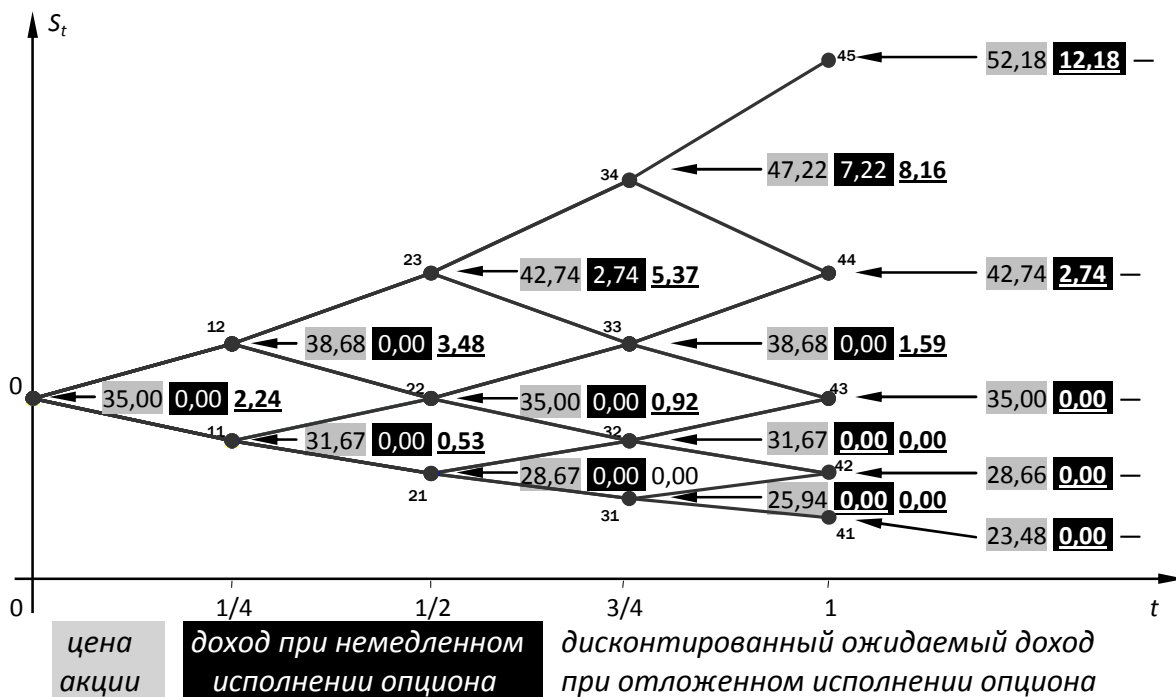


Рис. 7.3.3. Управление процессом владения американским опционом покупателя

Аналогично вычислим ожидаемый доход от исполнения опциона во всех остальных вершинах дерева цен, двигаясь от конечного момента к начальному [см. рис. 7.3.3, на котором ожидаемые доходы от исполнения опциона в будущем изображены черным по белому справа от (бело-черных) доходов от немедленного исполнения опциона]. Выделим жирным и подчеркнем лучшее из двух: немедленное получение дохода или ожидание.

Окончательно получаем, что

$$C_1^{(\text{амер.})} = \frac{3,48 \cdot 0,595 + 0,53 \cdot 0,405}{1,024} \approx 2,23 \text{ руб. —}$$

действительно, оказалось невыгодно досрочное исполнение американского опциона покупателя, и его рациональная стоимость совпала с рациональной стоимостью аналогичного европейского опциона покупателя.  $\square$

В следующем примере разберем определение рациональной стоимости американского опциона продавца, который, как мы увидим, исполнять досрочно выгодно.

**ПРИМЕР 7.3.5.** Требуется найти рациональную стоимость американского опциона продавца с терминальной стоимостью  $X = 40$  руб. и сроком исполнения 1 год, выпisanного на акцию из условия примера 7.3.1.

**Решение.** Изобразим на рис. 7.3.4 дерево возможных цен акции. Справа от каждой вершины на сером фоне укажем цену акции, а рядом с ней белыми цифрами на черном фоне напомним величину дохода, который можно получить, исполнив опцион немедленно. Например, если акция стоит 47 руб. 22 коп. (в вершине 34), то немедленное

исполнение опциона невыгодно совершенно (он не принесет дохода вообще), а если акция стоит 38 руб. 68 коп. (в вершине 33), то немедленное исполнение американского опциона продавца принесет доход 1 руб. 32 коп.

Предположим, что изменение цены акции привело к достижению вершины 33 (когда акция стоит 38 руб. 68 коп.). Если исполнить опцион немедленно, то будет получен доход 1 руб. 32 коп., если же подождать, как будут развиваться события дальше, то возможны два варианта:

- либо цена акции увеличится до 42 руб. 74 коп. (с вероятностью 0,595), и тогда держатель опциона никакого дохода не получит,
  - либо цена акции понизится до 35 руб. 00 коп. (с вероятностью 0,405), и тогда держатель опциона получит доход в размере 5 руб. 00 коп.
- Ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем равен

$$0,00 \cdot 0,595 + 5,00 \cdot 0,405 = 2,03.$$

Поскольку этот доход будет получен только через один период, дисконтируем его на четверть года — для сравнения с доходом от немедленного исполнения опциона:

$$\frac{2,03}{1,024} = 1,98.$$

Аналогично вычислим ожидаемый доход от исполнения опциона во всех остальных вершинах дерева цен, двигаясь от конечного момента к начальному [см. рис. 7.3.4, на котором ожидаемые доходы от исполнения опциона в будущем изображены черным по белому справа от (бело-черных) доходов от немедленного исполнения опциона].

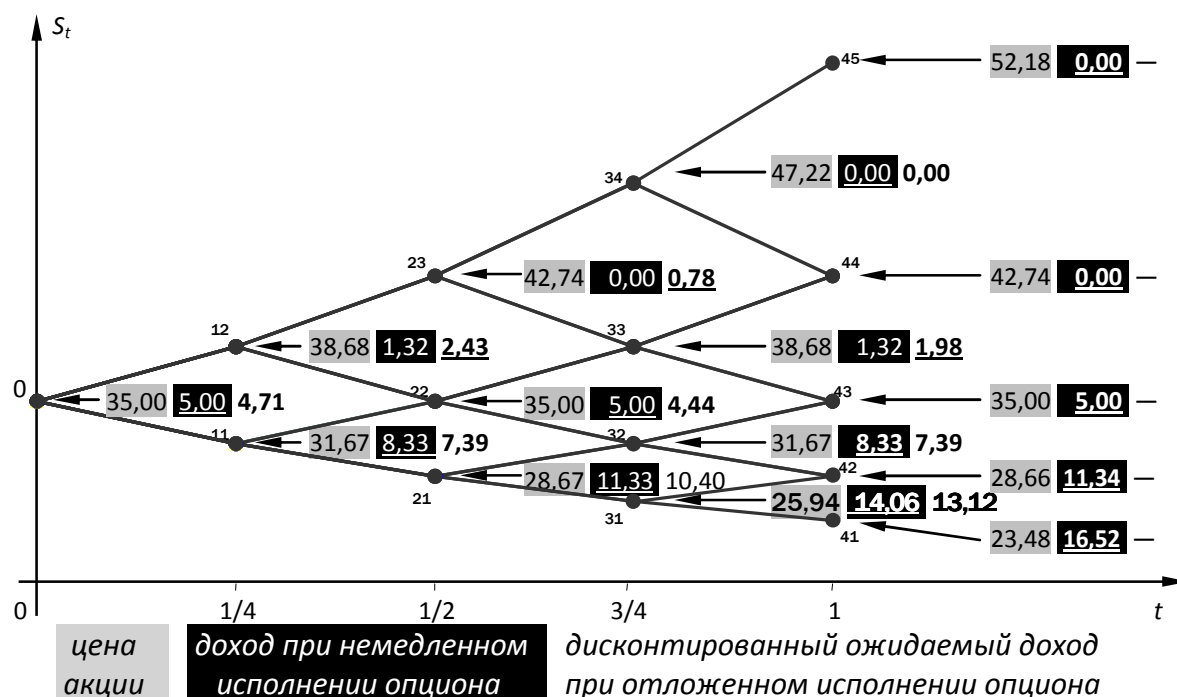


Рис. 7.3.4. Управление процессом владения американским опционом продавца

Выделим жирным и подчеркнем лучшее из двух: немедленное получение дохода или ожидание. Видим, что в отличие от американского опциона покупателя американский опцион продавца бывает выгодно исполнить заранее.

Окончательно получаем, что немедленное исполнение опциона в начальный момент времени (в вершине 0) принесет доход в размере 5 руб. 00 коп., при этом дисконтированный ожидаемый доход от исполнения опциона в будущем составляет

$$\frac{2,43 \cdot 0,595 + 8,33 \cdot 0,405}{1,024} = 4,71,$$

поэтому рациональная стоимость американского опциона продавца равна

$$\mathbb{P}_1^{(\text{амер.})} = \max\{5,00; 4,71\} = 5 \text{ руб. 00 коп. —}$$

она, действительно, оказалась выше рациональной стоимости аналогичного европейского опциона.  $\square$

Заметим, что нет ничего необычного в том, что рациональная стоимость какого-либо финансового инструмента оказалась равной нулю: это просто означает, что такой инструмент рациональному инвестору в принципе покупать не следует.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Имеются капитальные средства в количестве  $b = 1000$  единиц, срок службы которых составляет три года. Эти средства в начале каждого года могут перераспределяться между двумя предприятиями. Если первому предприятию в начале года выделить  $x$  единиц капитальных средств, то прибыль первого предприятия составит  $z_1(x) = 0,8x$  млн. руб., а если второму предприятию в начале года выделить  $x$  единиц капитальных средств, то прибыль второго предприятия будет равна  $z_2(x) = 0,5x$  млн. руб. К концу года средства  $x$ , выделенные в начале года первому предприятию, изнашиваются до  $0,3x$ , а средства  $x$ , выделенные второму предприятию, — до  $0,6x$ . По истечении каждого года средства заново перераспределяются между предприятиями, новых средств не поступает, доход в производство не вкладывается. Найдите такой план распределения капитальных средств между предприятиями в начале первого, второго и третьего года, который обеспечит максимальную суммарную прибыль двух предприятий за данные три года.
2. Производственное объединение состоит из четырех предприятий. Общая сумма капитальных вложений равна 5 млн. руб., выделяемые предприятиям суммы кратны 1 млн. руб. Если  $i$ -е предприятие получает инвестиции в объеме  $x$  млн. руб., то прирост годовой

- прибыли на этом предприятии составит  $z_i(x)$  млн. руб. в год, где  $z_1(x) = 0,1x^2$ ,  $z_2(x) = 0,3x^2$ ,  $z_3(x) = 0,2x^2$ . Найдите такой план распределения инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях.
3. Заявки потребителей на продукцию фирмы на первый второй и третий год составляют соответственно  $d_1 = 5$ ,  $d_2 = 3$  и  $d_3 = 2$  единицы. К началу первого этапа на складе имеется  $y_1 = 2$  единицы продукции. Затраты на хранение единицы продукции в течение первого, второго и третьего года равны  $h_1 = 5$ ,  $h_2 = 4$ ,  $h_3 = 3$  ден. ед. Затраты на производство  $u_j$  единиц продукции на  $j$ -м этапе определяются функцией  $\phi_j(u_j) = u_j^2 + 4u_j + 3$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Составьте такой поэтапный план производства продукции, который обеспечивает удовлетворение всех заявок при минимальных суммарных затратах на производство и хранение.
  4. Производственным объединением, состоящим из трех предприятий, должен быть произведен определенный продукт в количестве 15 тыс. шт. (продукт производится партиями по 1 тыс. шт.) Издержки первого, второго и третьего предприятия по изготовлению  $x$  партий продукта составляют соответственно  $z_1(x) = x^2$ ,  $z_2(x) = x^2$  и  $z_3(x) = 2x^2$  тыс. руб. Найдите такой план производства продукта силами трех предприятий, который обеспечит наименьшие суммарные издержки.
  5. Эффективная процентная ставка составляет  $i = 10\%$ , а год разбивается на четыре периода, в каждом из которых акция может возрасти в цене или упасть в цене в  $u = 1,2$  раза. Найти рациональные стоимости европейских и американских опционов покупателя и продавца с терминальной стоимостью  $X$  руб. и сроком исполнения 1 год, выписанных на акцию, текущая цена которой равна  $S_0 = 100$  руб. Расчеты выполните для четырех случаев: а)  $X = 120$  руб.; б)  $X = 180$  руб.; в)  $X = 210$  руб.; г)  $X = 40$  руб.

## ГЛАВА 8. ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### § 8.1. Графы

Геометрический подход к описанию и трактовке процессов управления дает ряд дополнительных возможностей, поэтому широкое распространение в задачах поддержки принятия решений получили оптимизационные модели на графах.

*Графом* называется пара объектов, состоящая из множества точек и множества отрезков, соединяющих некоторые из этих точек (может быть, все). Упомянутые точки называются *вершинами графа*. Если отрезки, соединяющие вершины графа, имеют направления, то граф называется *ориентированным*, а сами отрезки — *дугами*. Если же отрезки не имеют направления, то граф называется *неориентированным*, и в этом случае говорят, что вершины графа соединены *ребрами*. *Смешанным* называется граф, в котором содержатся как ориентированные, так и неориентированные отрезки. Ориентированный граф часто называют *сетью*.

Обозначим вершины графа  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , а дугу, соединяющую вершину  $X_i$  с  $X_j$  в направлении от  $X_i$  к  $X_j$  —  $u_{ij}$ . Граф  $\Gamma$ , образованный множеством вершин  $\mathcal{X}$  и множеством дуг  $\mathcal{U}$ , обозначают  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ .

Например, план города можно рассматривать как смешанный граф, в котором дуги и ребра представляют улицы, а вершины — перекрестки, при этом улица с односторонним движением изображается дугой, а с двусторонним — отрезком без ориентации.

Две дуги графа (два ребра) называются *смежными*, если они различны и имеют общую вершину. Две вершины графа называются *смежными*, если существует дуга (ребро), соединяющая их.

Говорят, что дуга *исходит из вершины*  $X_i$ , если  $X_i$  является ее началом. Дуга *заходит в вершину*  $X_j$ , если  $X_j$  является ее концом. Такую дугу мы обозначим через  $u_{ij}$ . Говорят, что в графе данная дуга *инцидентна* данной вершине, если эта вершина является началом или концом данной дуги.

Обозначим  $U_{X_i}^+$  множество дуг, исходящих из данной вершины  $X_i$ , а  $U_{X_i}^-$  — множество дуг, входящих в  $X_i$ . Их объединение есть множество дуг  $U_{X_i}$ , инцидентных данной вершине  $U_{X_i} = U_{X_i}^+ \cup U_{X_i}^-$ .

*Путь* в ориентированном графе — это последовательность дуг, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Обозначим

$$\mu = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\}$$

путь, последовательность вершин которого  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ .

Путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды, называется *элементарным*. Путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды, называется *простым*, в противном случае — *составным*. Конечный путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной, называется *контуром*. Контур, образованный одной дугой, называется *петлей*.

Ориентированный граф называется *симметрическим*, если любые две смежные вершины его соединены двумя противоположно ориентированными дугами. Ориентированный граф называется *антисимметрическим*, если каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении и петли отсутствуют.

Для неориентированных графов вводятся понятия, аналогичные понятиям пути, контура и др. Меняются только названия: вместо дуги говорим *ребро*, вместо пути — *цепь*, вместо контура — *цикл* и т. д.

Неориентированный граф называется *связным*, если две любые вершины его можно соединить цепью. Конечный связный неориентированный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Граф, представляющий объединение деревьев, называется *лесом*.

## § 8.2. ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ И КРИТИЧЕСКОМ ПУТИ

Пусть требуется на графе  $\Gamma$  найти *кратчайший путь* — путь наименьшей длины из вершины  $X_0$  в вершину  $X_n$ . Удобнее всего для поиска кратчайшего пути использовать следующий алгоритм.

### АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ.

1. Присвоить каждой вершине  $X_i$  метку  $\lambda_i$  так, чтобы  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_i = +\infty$  ( $i > 0$ ).
2. Найти дугу  $u = u_{ij} = (X_i, X_j)$ , для которой выполняется неравенство  $\lambda_j - \lambda_i > l(u_{ij})$  (полагая, что  $\infty - \infty = 0$ ). Заменить метку вершины  $x_j$  на новую, меньшую метку  $\lambda_j = \lambda_i + l(u_{ij})$ .
3. П. 2 применять до тех пор, пока для каждой дуги  $u_{ij}$  не станет справедливым неравенство  $\lambda_j - \lambda_i \leq l(u_{ij})$ .
4. Найти вершину  $X_k$ , из которой выходит дуга, приходящая в  $X_n$ , и для которой  $\lambda_n = \lambda_k + l(u_{kn})$ , затем вершину  $X_m$ , из которой выходит дуга, приходящая в  $X_k$ , и для которой  $\lambda_k = \lambda_m + l(u_{mk})$  и т. д. На некотором

шаге  $X_p$  совпадет с вершиной  $X_0$ . Путь  $\mu = (X_p, \dots, X_m, X_k, X_n)$  будет кратчайшим, а его длина будет равна  $\lambda_n$ .

В некоторых моделях возникает задача о нахождении не самого короткого, а наоборот, самого длинного пути между двумя заданными вершинами графа. Для этого, конечно, требуется, чтобы в графе не было контуров.

В задаче о критическом пути требуется на графе  $\Gamma$  найти критический путь — путь наибольшей длины из вершины  $X_0$  в вершину  $X_n$ .

Если рассмотреть сетевой график, дуги которого соответствуют работам, запланированным по некоторому проекту, а метка каждой дуги равна запланированному времени выполнения соответствующей работы, то критический путь состоит из работ, замедление каждой из которых влияет на время выполнения всего проекта. Менеджер проекта должен особое внимание обращать на своевременное выполнение работ критического пути.

Алгоритм Дейкстры легко модифицировать для решения задачи о критическом пути — достаточно заменить знаки длин дуг на противоположные.

**ПРИМЕР 8.2.1.** Требуется определить кратчайший путь из вершины  $X_0$  в вершину  $X_8$  в графе, изображенном на рис. 8.2.1, а, где числа на дугах означают длины этих дуг.

**Решение.** Решение задачи по приведенному алгоритму иллюстрируется табл. 8.2.1 и рис. 8.2.1, б — е.

**Таблица 8.2.1**

Шаг Вершина	1		2		3		4		5		6	
	$\lambda$	$X_{i-1}$	$\lambda$	$X_{i-1}$	$\lambda$	$X_{i-1}$	$\lambda$	$X_{i-1}$	$\lambda$	$X_{i-1}$	$\lambda$	$X_{i-1}$
$X_0$	0	$X_0$	0	$X_0$	0	$X_0$	0	$X_0$	0	$X_0$	0	$X_0$
$X_1$	$+\infty$	—	1	$X_0$	1	$X_0$	1	$X_0$	1	$X_0$	1	$X_0$
$X_2$	$+\infty$	—	4	$X_0$	4	$X_0$	4	$X_0$	4	$X_0$	4	$X_0$
$X_3$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	2	$X_1$	2	$X_1$	2	$X_1$	2	$X_1$
$X_4$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	2	$X_1$	2	$X_1$	2	$X_1$	2	$X_1$
$X_5$	$+\infty$	—	5	$X_0$	5	$X_0$	5	$X_0$	5	$X_0$	5	$X_0$
$X_6$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	$+\infty$	—	3	$X_3$	3	$X_3$	3	$X_3$
$X_7$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	7	$X_2$	7	$X_2$	5	$X_6$	5	$X_6$
$X_8$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	8	$X_5$	8	$X_5$	8	$X_5$	7	$X_7$

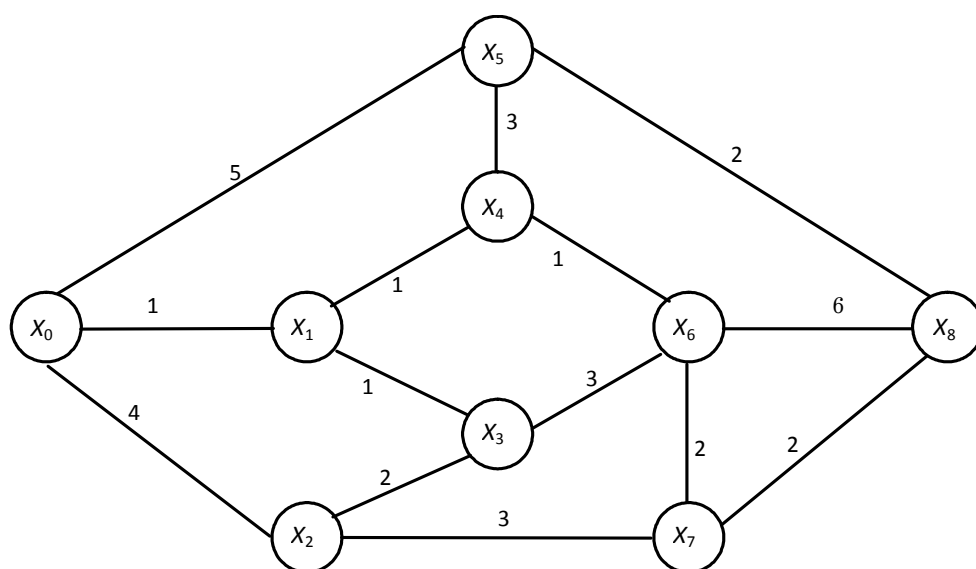
На этих рисунках пунктиром отмечены проверенные, но не перспективные пути (имеющие длину большую, чем кратчайший путь из вершины  $X_0$  в данную вершину, а рядом с дугами, приходящими в вершины, написаны метки соответствующих вершин (т. е. длины самых коротких путей из  $X_0$  в данную вершину).

На последнем шаге (рис. 8.2.1, е) получены кратчайшие пути из вершины  $X_0$  во все остальные, в том числе, и кратчайший путь из  $X_0$  в  $X_8$ :

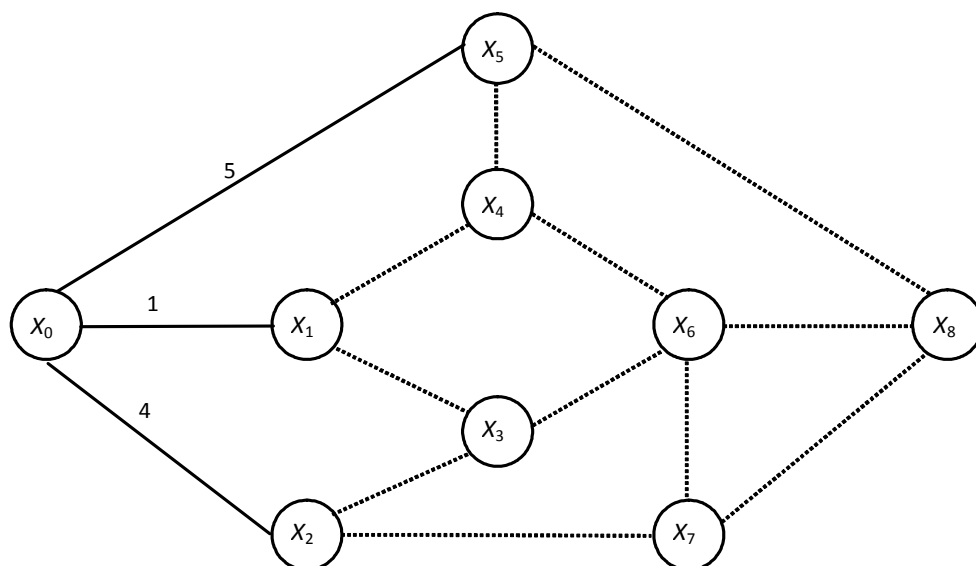
$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_7 \rightarrow X_8.$$

Длина этого пути равна

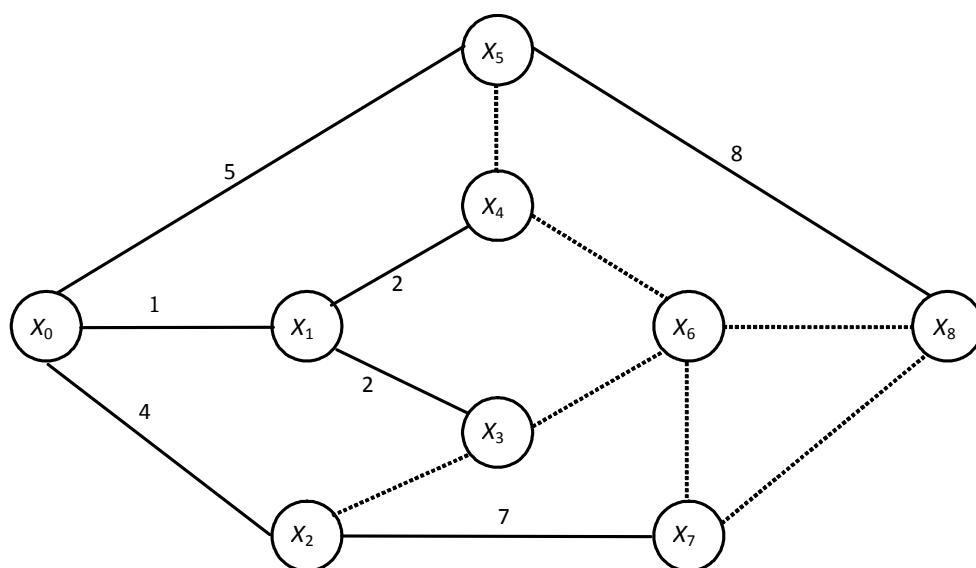
$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7. \quad \square$$



а)

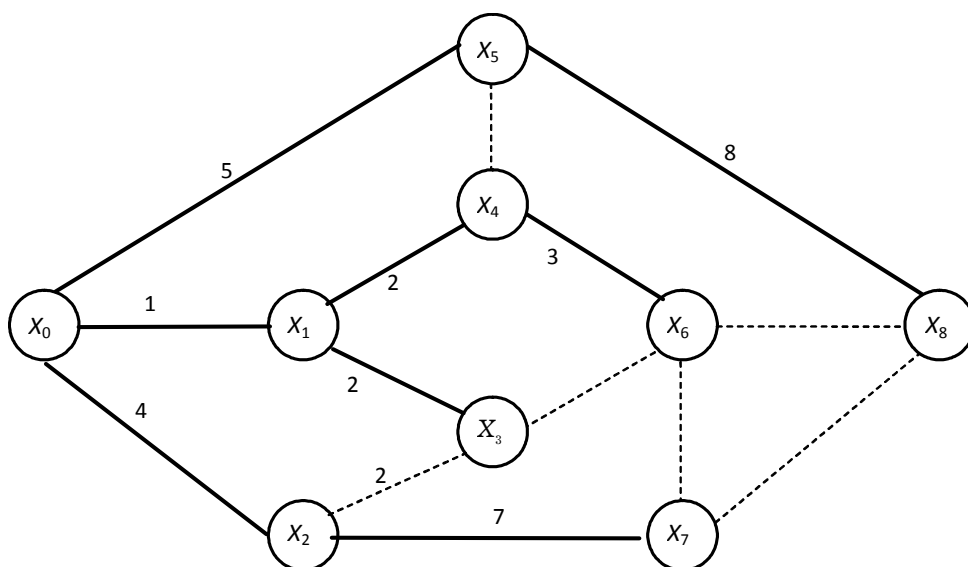


б)

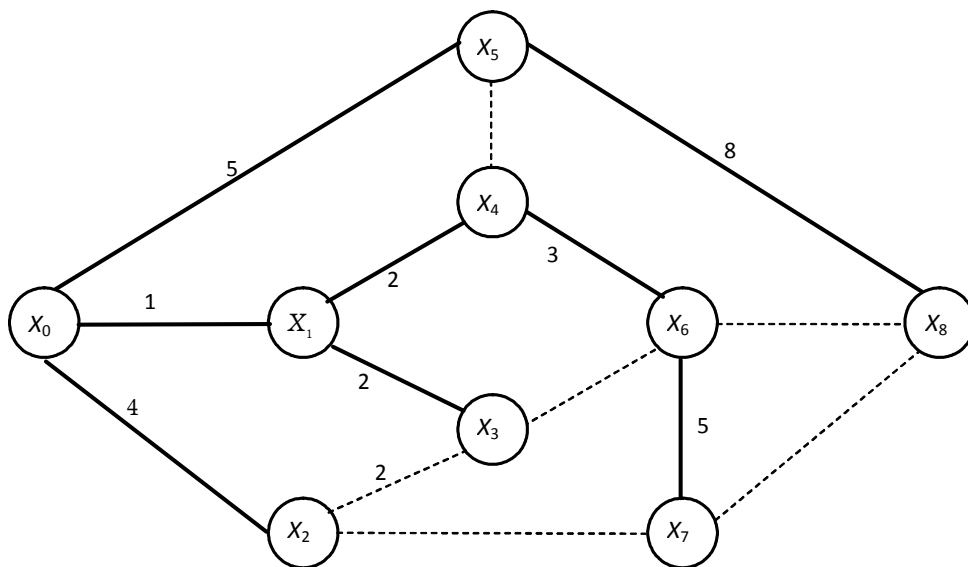


в)

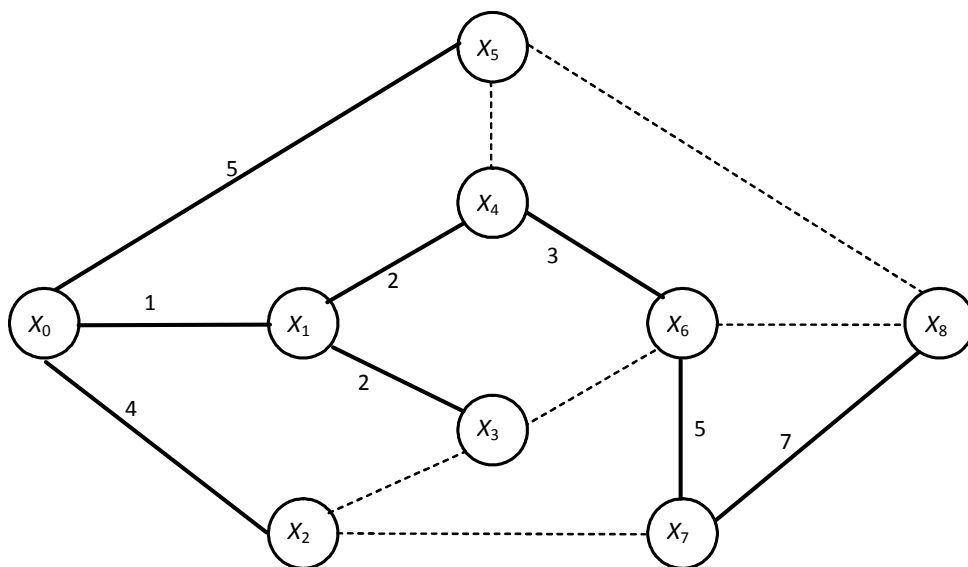
Рис. 8.2.3. Определение кратчайшего пути



*z)*



*d)*



*e)*

### § 8.3. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Пусть дана некоторая совокупность географических пунктов, связанных между собой автомобильными или железными дорогами. При планировании перевозок часто возникает задача об организации максимального потока грузов (т. е. перевозки максимального количества грузов в единицу времени) из одного пункта в другой с учетом того обстоятельства, что пропускная способность каждой дороги ограничена. Сформулируем эту задачу математически.

Каждая совокупность пунктов вместе с соединяющими их дорогами схематически может быть изображена в виде некоторой сети, в которой линии соответствуют дорогам, а пересечения — отдельным пунктам или станциям. Поэтому рассмотрим ориентированный граф с  $n + 1$  вершиной  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ , где некоторые упорядоченные пары точек  $(X_i, X_j)$  соединены дугами  $u_{ij}$ , причем каждой такой дуге поставлено в соответствие неотрицательное число  $c_{ij} = c(u_{ij})$ , называемое ее *пропускной способностью*.

Зафиксируем какие-нибудь две вершины графа, например,  $X_0$  и  $X_n$ . По путям  $\mu\{X_0, X_i, X_j, \dots, X_k, X_n\}$  составленным из дуг  $(X_0, X_i), (X_i, X_j), \dots, (X_k, X_n)$  сети и не образующих контуров, направляется жидкость, газ или транспорт из точки  $X_0$  сети в точку  $X_n$ . Назовем  $X_0$  *входом сети*,  $X_n$  — *выходом*. Пропускная способность  $c_{ij}$  дуги  $(X_i, X_j)$  определяет максимальное количество вещества, которое может пропустить эта дуга за единицу времени. Если какая-то пара точек  $X_k, X_l$  не соединена дугой, то будем считать  $c_{kl} = 0$ . Кроме того, будем считать рассматриваемый граф симметрическим, т. е. если в сеть входит дуга  $(X_i, X_j)$ , то в нее входит и симметричная дуга  $(X_j, X_i)$ , причем пропускные способности этих дуг могут быть различными:  $c_{ij} \neq c_{ji}$ .

*Потоком  $z_{ij}$  по дуге  $(X_i, X_j)$*  называется количество вещества, проходящее через эту дугу в единицу времени. *Потоком по сети*, или просто *потоком*, назовем совокупность  $\{z_{ij}\}$  потоков по всем дугам сети. Будем считать, что потоки удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \leq z_{ij} \leq c_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (8.3.1)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_{ik} - \sum_{j=1}^n z_{kj} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8.3.2)$$

Ограничения (8.3.1) означают, что поток по любой дуге неотрицателен и не превышает пропускной способности дуги.

В уравнениях (8.3.2) уменьшаемая сумма  $z_{0k} + z_{1k} + \dots + z_{n-1,k}$  представляет количество вещества, притекающего в вершину  $X_k$  по всем входящим в эту вершину дугам (если из  $X_l$  в  $X_k$  не входит дуга, то  $z_{lk} = 0$ ), а вы-

читаема сумма  $z_{k1} + z_{k2} + \dots + z_{kn}$  представляет количество вещества, вытекающего из вершины  $X_k$  по всем выходящим из этой вершины дугам (также  $z_{kl} = 0$ , если нет дуги  $(X_k, X_l)$ ).

Таким образом, ограничения (8.3.2) означают, что количество вещества, притекающего в произвольную точку сети (кроме  $X_0$  и  $X_n$ ), равно количеству вещества, вытекающего из этой точки. Поток, удовлетворяющий ограничениям (8.3.1) и (8.3.2), будем называть *допустимым*.

Из ограничений (8.3.2) также следует, что общее количество вещества  $\sum_{j=1}^n z_{0j}$ , вытекающего из вершины  $X_0$  (входа сети), совпадает с общим количеством вещества  $\sum_{i=0}^{n-1} z_{in}$ , притекающего в вершину  $X_n$  (выход сети), т. е.

$$\sum_{j=1}^n z_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} z_{in} = w. \quad (8.3.3)$$

Линейная функция  $w$  называется *величиной потока в сети*.

Таким образом, задача о максимальном потоке в сети представляет собой задачу линейного программирования: среди всех решений системы линейных ограничений (8.3.1)—(8.3.2) следует найти такое решение, которое максимизирует линейную форму (8.3.3). Это решение  $z_{ij}^*$  называется *максимальным потоком в сети*.

Как и любая задача линейного программирования, она может быть решена одним из известных методов линейного программирования. Но в силу специфики задачи ее легче решить специальными методами.

Введем некоторые дополнительные понятия. Разобьем множество всех вершин сети на два непересекающихся подмножества  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  так, чтобы  $X_0 \in \mathcal{P}$ , а  $X_n \in \mathcal{Q}$ . Сечением  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  сети назовем совокупность всех дуг  $(X_i, X_j)$ , концы которых принадлежат разным подмножествам. Каждому сечению  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  поставим в соответствие число  $C(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  — *пропускную способность сечения*, — равное сумме пропускных способностей всех дуг сети, начинающихся в  $\mathcal{P}$  и кончающихся в  $\mathcal{Q}$ , т. е.

$$C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} c_{ij}.$$

Любой путь из  $X_0$  в  $X_n$  обязательно содержит хотя бы одну дугу сечения  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ , которая начинается в  $\mathcal{P}$  и кончается в  $\mathcal{Q}$ . Но пропускная способность пути не превышает пропускной способности каждой его дуги. Поэтому величина любого потока из  $X_0$  в  $X_n$ , являющаяся суммарной пропускной способностью всех путей из  $X_0$  в  $X_n$ , не может превысить пропускной способности любого сечения  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ , т. е. всегда

$$w \leq C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}).$$

Отсюда заключаем, что если удастся построить такой поток  $\{z_{ij}^*\}$ , при котором величина его  $w^*$  окажется равной пропускной способности некоторого сечения  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$ , т. е.  $w^* = C(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$ , то этот поток будет максимальным, а  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$  — сечением с минимальной пропускной способностью.

Введем еще одно понятие. Пусть задан некоторый поток  $\{z_{ij}\}$ . Будем говорить, что дуга  $u_{ij}$  с началом в  $X_i$  и концом в вершине  $X_j$  является *насыщенной*, если  $z_{ij} = c_{ij}$ , т. е. величина потока по этой дуге равна пропускной способности дуги. Если же величина потока по дуге меньше пропускной способности дуги  $z_{ij} < c_{ij}$ , то такую дугу называют *ненасыщенной*.

Наиболее удобен следующий алгоритм решения задачи о максимальном потоке.

#### **АЛГОРИТМ ФОРДА — ФАЛКЕРСОНА.**

1. Построить какой-нибудь начальный поток  $\{z_{ij}^0\}$ .
2. Проверить, можно ли построить путь из  $X_0$  в  $X_n$ , состоящий только из ненасыщенных дуг. Если нет, то построенный ранее поток максимален. Если да, то перейти к п. 3.
3. Выделить какой-нибудь путь, ведущий из  $X_0$  в  $X_n$  по ненасыщенным дугам, найти минимальную пропускную способность дуг этого пути  $\theta$  и увеличить поток через каждую дугу этого пути на  $\theta$ . Построить новый поток. Перейти к п. 2.

Алгоритм может остановиться в том случае, если не удастся построить путь из  $X_0$  в  $X_n$  по ненасыщенным дугам. В противном случае алгоритм может быть продолжен. При этом на каждом шаге образуется по крайней мере одна новая насыщенная дуга. Так как число дуг в сети конечно, то п. 3 может выполняться лишь конечное число раз, поэтому указанный алгоритм обязательно построит максимальный поток, и притом за конечное число шагов.

Следует обратить особое внимание на выполнение п. 3. Если по некоторому пути  $\mu$  мы пропустили поток величиной  $\theta$ , то пропускные способности всех дуг этого пути следует уменьшить на  $\theta$ , т. е. новая пропускная способность дуги  $(X_i, X_j)$  пути будет равна  $c'_{ij} = c_{ij} - \theta$ . Эта дуга может участвовать в последующем выборе нового пути, но с уменьшенной пропускной способностью. Поэтому вычисление новых пропускных способностей всех звеньев найденного пути совершенно необходимо. Кроме того, надо также учесть возможность существования вместо найденного пути другого, в котором участвует некоторая дуга, симметричная одной из дуг предыдущего пути. Для этого пропускные способности всех дуг, симметричных дугам старого пути  $\nu$ , следует увеличить на  $\theta$ , т. е. пропускную способность дуги  $(X_j, X_i)$ , симметричной использованной в предшествующем

пути дуге  $(X_i, X_j)$ , надо считать равной  $c'_{ji} = c_{ji} + \theta$ . Это следует из того, что дуга  $(X_j, X_i)$  не препятствует доставке в  $X_i$  количества  $c_{ji}$  вещества по новому пути с использованием этой дуги плюс количества  $\theta$  по части старого пути от  $X_0$  до  $X_i$  без использования этой дуги (так как пропускная способность всех дуг старого пути не меньше  $\theta$ ). Мы учитываем, что  $X_i$  теперь соединена с  $X_0$  двумя путями, т. е. получается, что дуга  $(X_j, X_i)$  как бы заменена новой дугой с увеличенной пропускной способностью  $c_{ji} + \theta$ .

Таким образом, процесс отыскания максимального потока в сети сводится к следующим действиям.

1. Построить произвольный путь  $\mu$  из  $X_0$  в  $X_n$ , идущий по ненасыщенным дугам.
2. Определить пропускную способность  $\theta^\mu$  найденного пути как наименьшую из пропускных способностей дуг этого пути

$$\theta^\mu = \min\{c_{ij}^\mu\}; \quad (8.3.4)$$

3. Вычислить новые пропускные способности всех дуг данного пути:

$$\hat{c}_{ij}^\mu = c_{ij}^\mu - \theta^\mu; \quad (8.3.5)$$

4. Вычислить новые пропускные способности всех тех дуг, которые симметричны дугам данного пути

$$\hat{c}_{ji}^\mu = c_{ji}^\mu + \theta^\mu; \quad (8.3.6)$$

5. Процесс, описанный в пп. 2—4, продолжается до тех пор, пока удастся построить путь из  $X_0$  в  $X_n$ , идущий по ненасыщенным дугам. Если такой путь построить нельзя, то это означает, что из источника  $X_0$  в сток пропущен максимальный поток. Затем следует вычесть пропускную способность соответствующей дуги исходной сети. Положительные значения найденных разностей определяют величины потоков по дугам в максимальном потоке данной сети, а величина максимального потока в сети равна

$$w^* = \sum_{j=1}^n z_{oj}^* = \sum_{i=0}^{n-1} z_{in}^*.$$

В заключение подчеркнем еще раз, что процесс преобразований прекращается, как только будет получена сеть, в которой нельзя построить ни одного пути из  $X_0$  в  $X_n$ , идущего по ненасыщенным дугам.

Покажем, что полученный таким образом поток является максимальным. Для этого построим в последней сети сечение  $(P, Q)$  следующим образом. Ко множеству  $P$  отнесем источник  $X_0$  и все те вершины, которые достижимы из  $X_0$  по какому-нибудь пути, составленному из нена-

сыщенных дуг, а все остальные вершины сети (недостижимые) отнесем к множеству  $\mathcal{Q}$ . Очевидно,  $X_n \in \mathcal{Q}$ , так как не существует никакого ненасыщенного пути из  $X_0$  в  $X_n$ .

Все дуги сечения, направленные из  $\mathcal{P}$  в  $\mathcal{Q}$ , загружены полностью до пропускных способностей [т. е. для величины потока  $z_{ij}$  по дуге  $(X_i, X_j)$  при  $X_i \in \mathcal{P}, X_j \in \mathcal{Q}$  имеем  $z_{ij} = c_{ij}$ ], а дуги  $(X_j, X_i)$  противоположного направления, идущие из  $\mathcal{Q}$  в  $\mathcal{P}$ , в построенном потоке не используются (т. е.  $z_{ji} = 0$  при  $X_j \in \mathcal{Q}, X_i \in \mathcal{P}$ ), так что величина потока равна

$$w = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} z_{ij} - \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} z_{ji} = \sum_{\substack{X_i \in \mathcal{P} \\ X_j \in \mathcal{Q}}} c_{ij} = C(\mathcal{P}, \mathcal{Q}),$$

т. е. построенный поток максимален, а  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  — сечение с минимальной пропускной способностью (*минимальное сечение*).

**ПРИМЕР 8.3.1.** Требуется определить максимальный поток в сети, изображенной на рис. 8.3.1, из вершины  $X_0$  в вершину  $X_8$ , где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях.

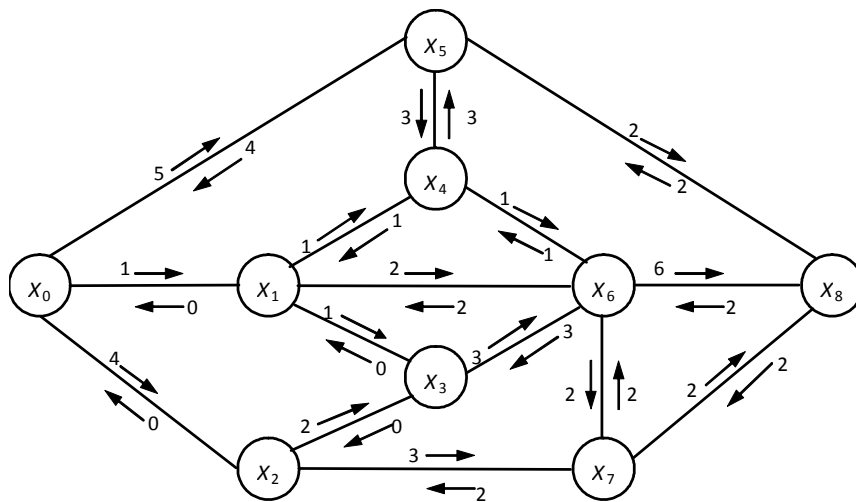


Рис. 8.3.1. Транспортная сеть

**Решение.** В качестве начального возьмем нулевой поток, когда все  $z_{ij} = 0$ . Найдем какой-нибудь путь из  $X_0$  в  $X_8$ , например,  $\mu_1 = \{X_0, X_5, X_8\}$ . По этому пути можно пропустить поток величиной не более

$$\theta_1 = \min\{c_{05}, c_{58}\} = \min\{5, 2\} = 2.$$

Предположим, что поток такой величины 2 по указанному пути мы пропустили. Получили новый поток  $\{z'_{ij}\}$ . При этом пропускные способности дуг пути и симметричных им дуг изменяются. Согласно (8.3.5) и (8.3.6) пропускные способности дуг пути уменьшаются на 2 единицы:

$$c'_{05} = c_{05} - \theta_1 = 5 - 2 = 3, \quad c'_{58} = c_{58} - \theta_1 = 2 - 2 = 0,$$

т. е. дуга  $(X_5, X_8)$  становится насыщенной, а пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, увеличиваются на 2 единицы:

$$c'_{50} = c_{50} + \theta_1 = 4 + 2 = 6, \quad c'_{85} = c_{85} + \theta_1 = 2 + 2 = 0.$$

Сеть с новыми пропускными способностями дуг приведена на рис. 8.3.2, а.

Теперь находим новый путь из  $X_0$  в  $X_8$ , проходящий по ненасыщенным дугам, например,  $\mu_2 = \{X_0, X_5, X_4, X_6, X_8\}$ , определяем

$$\theta_2 = \min\{c_{05}, c_{54}, c_{46}, c_{68}\} = \min\{3, 3, 1, 6\} = 1$$

и пропускаем по этому пути поток величиной в одну единицу. Меняем пропускные способности дуг этого пути и симметричных им дуг:

$$\begin{aligned} c''_{05} &= c'_{05} - \theta_2 = 3 - 1 = 2, & c''_{50} &= c'_{50} + \theta_2 = 6 + 1 = 7, \\ c''_{54} &= c'_{54} - \theta_2 = 3 - 1 = 2, & c''_{45} &= c'_{45} + \theta_2 = 3 + 1 = 4, \\ c''_{46} &= c'_{46} - \theta_2 = 1 - 1 = 0, & c''_{64} &= c'_{64} + \theta_2 = 1 + 1 = 2, \\ c''_{68} &= c'_{68} - \theta_2 = 6 - 1 = 5, & c''_{86} &= c'_{86} + \theta_2 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Дуга  $(X_4, X_6)$  становится насыщенной. Сеть с измененными пропускными способностями приведена на рис. 8.3.2, б.

Далее последовательно находим пути  $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$  и по ним пропускаем потоки величиной  $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  соответственно:

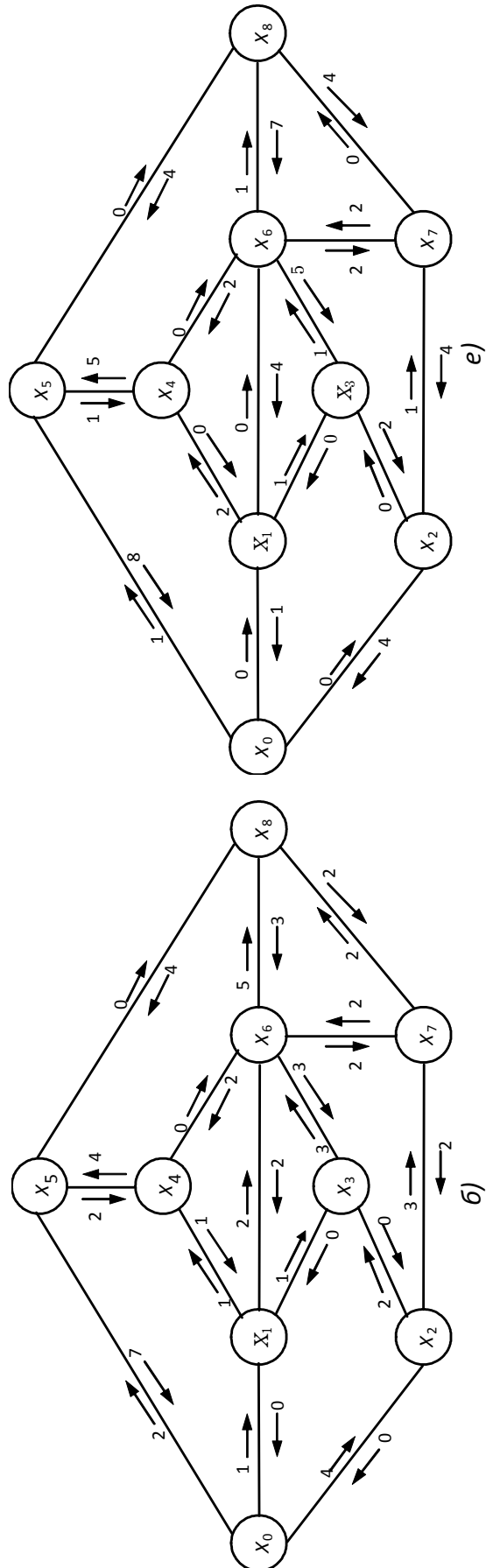
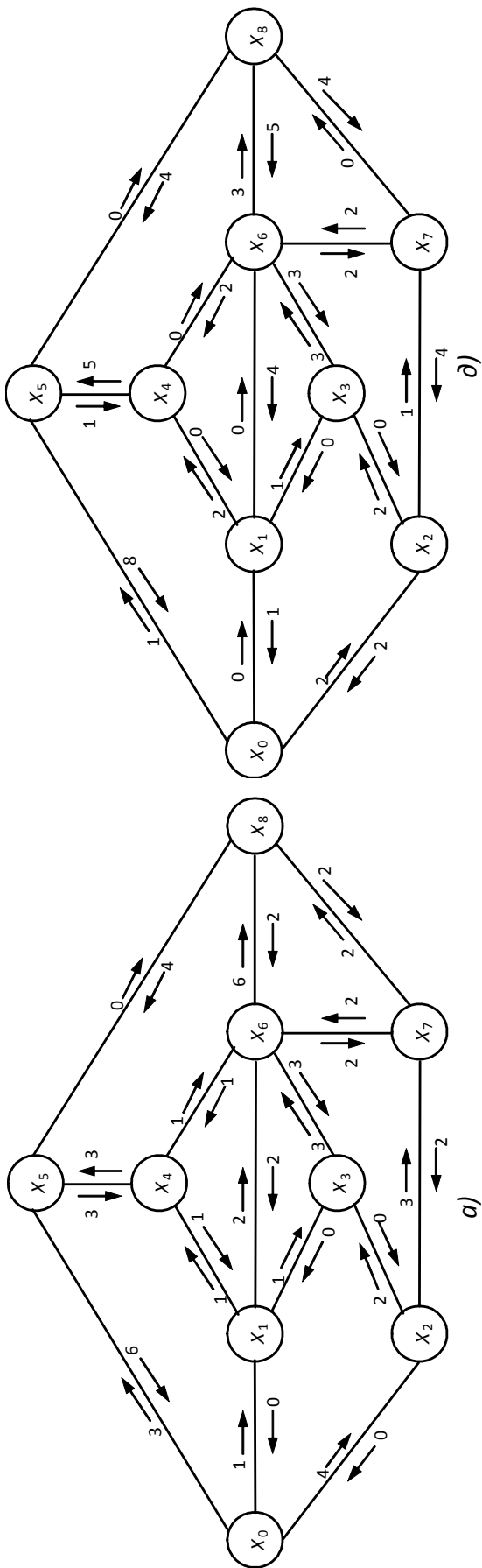
$$\begin{aligned} \mu_3 &= \{X_0, X_5, X_4, X_1, X_6, X_8\}, & \theta_3 &= \min\{2, 2, 1, 2, 5\} = 1 \quad (\text{рис. 8.3.2, в}), \\ \mu_4 &= \{X_0, X_1, X_6, X_8\}, & \theta_4 &= \min\{1, 1, 4\} = 1 \quad (\text{рис. 8.3.2, г}), \\ \mu_5 &= \{X_0, X_2, X_7, X_8\}, & \theta_5 &= \min\{4, 3, 2\} = 2 \quad (\text{рис. 8.3.2, д}), \\ \mu_6 &= \{X_0, X_2, X_3, X_6, X_8\}, & \theta_6 &= \min\{2, 2, 3, 3\} = 2 \quad (\text{рис. 8.3.2, е}). \end{aligned}$$

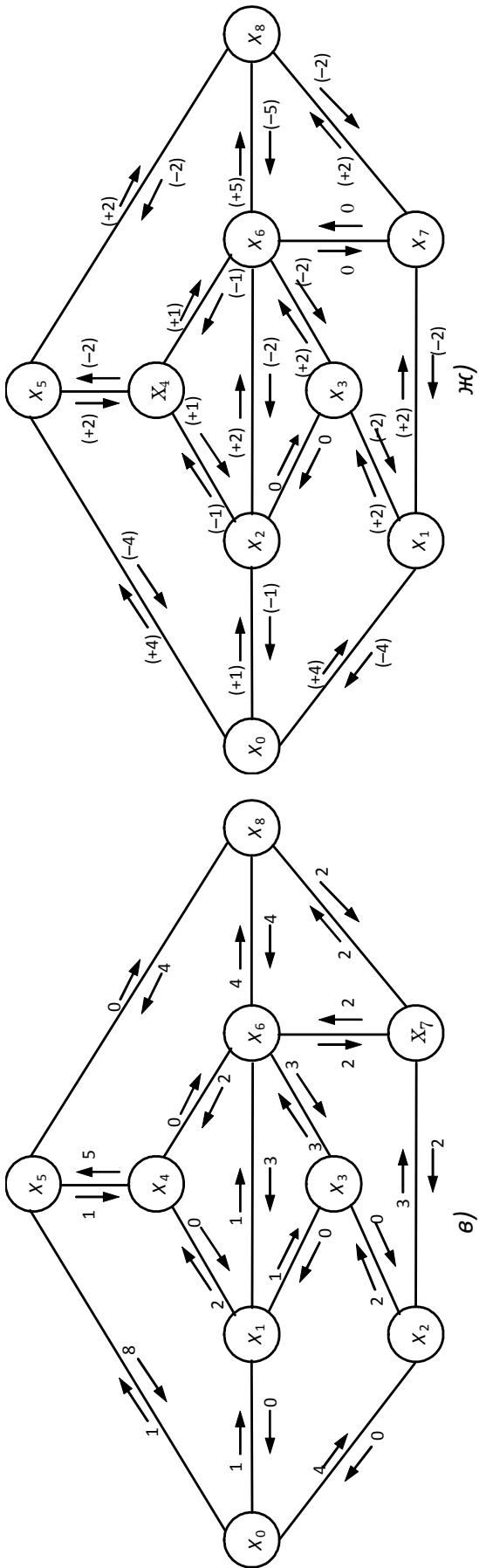
На указанных в скобках рисунках приведены сети, полученные после соответствующих преобразований на каждом шаге. В сети, изображенной на рис. 8.3.2, е, уже нельзя указать ни одного пути, идущего из  $X_0$  в  $X_8$  по ненасыщенным дугам. Следовательно, процесс преобразований закончен.

Чтобы определить максимальный поток, вычитаем от пропускных способностей дуг исходной сети (рис. 8.3.1) измененные пропускные способности тех же дуг последней сети (рис. 8.3.2, е). Результат приведен на рис. 8.3.2, ж.

Положительные значения найденных разностей дают нам величины  $z_{ij}$  потоков по соответствующим дугам  $(X_i, X_j)$  в максимальном потоке из источника  $X_0$  в сток  $X_8$ .

Искомый максимальной поток приведен на рис. 8.3.2, з, где числа, стоящие у каждой дуги, показывают величину потока по данной дуге, а стрелки — направление потока по этой дуге.





2)

3)

Рис. 8.3.2. Определение максимального потока в сети

Величина максимального потока равна

$$w_{\max} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9$$

или, как видно из рис. 8.3.2, з,

$$w_{\max} = z_{05} + z_{01} + z_{02} = 4 + 1 + 4 = 9,$$

$$w_{\max} = z_{58} + z_{68} + z_{78} = 2 + 5 + 2 = 9.$$

Обычно процесс решения задачи записывают в виде последовательности матриц изменяющихся пропускных способностей дуг сети. Чтобы не писать нулевые элементы этих матриц, удобно для каждого шага чертить соответствующую таблицу, оставляя пустыми те клетки, где должны стоять нули. Для исходной сети, приведенной на рис. 8.3.1, матрица пропускных способностей дуг будет иметь вид табл. 8.3.1.

Таблица 8.3.1

$X_i \backslash X_j$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	•	1	4			5 <sup>-</sup>			
$X_1$		■		1	1		2		
$X_2$			■	2				3	
$X_3$				■			3		
$X_4$		1			■	3	1		
$X_5$	4 <sup>+</sup>				3	■			2 <sup>-</sup>
$X_6$		2		3	1		■	2	6
$X_7$			2				2	■	2
$X_8$						2 <sup>+</sup>	2	2	■

Таблица 8.3.2

$X_i \backslash X_j$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	•	1	4			2 <sup>-</sup>			
$X_1$		■		1	1		2		
$X_2$			■	2				3	
$X_3$				■			3		
$X_4$					■	3 <sup>+</sup>	1 <sup>-</sup>		
$X_5$	6 <sup>+</sup>				3 <sup>-</sup>	■			
$X_6$		2		3	1 <sup>+</sup>		■	2	6 <sup>-</sup>
$X_7$			2				2	■	2
$X_8$						4	2 <sup>+</sup>	2	■

Чтобы по таблице пропускных способностей дуг сети, не имея рисунка сети, найти какой-нибудь путь из источника в сток, идущий по ненасыщенным дугам, можно поступить следующим образом.

В нулевой строке таблицы выберем какой-нибудь элемент  $c_{0j}$ , отличный от нуля, например,  $c_{05}$ , стоящий в пятом столбце. Из вершины  $X_0$  можно перейти в  $X_5$ . Для наглядности дугу  $(X_0, X_5)$  проведем прямо в нулевой строке таблицы из нулевого столбца в пятый, выделив начало дуги кружочком, конец — стрелкой. Теперь мы находимся в вершине  $X_5$ . Чтобы зафиксировать это, сместимся по пятому столбцу до строки с тем же пятым номером и отметим эту клетку кружочком, а переход по вертикали — пунктиром. В пятой строке имеются три ненулевых элемента соответственно в нулевом, четвертом и восьмом столбцах. Это означает, что из  $X_5$  можно перейти или в  $X_0$  или в  $X_4$  или в  $X_8$ . Возвращаться в  $X_0$  нет смысла, лучше всего идти в сток  $X_8$ . Этот переход изображен стрелкой в пятой строке с началом в пятом столбце и концом — в восьмом.

Таким образом, по таблице мы нашли путь, ведущий по ненасыщенным дугам из источника в сток:

$$X_0 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6.$$

Теперь по таблице надо указать пропускную способность найденного пути и изменить пропускные способности дуг этого пути и симметричных им дуг. Для этого отмечаем знаком «минус» числа в тех клетках, где находятся концы дуг, а числа в клетках, симметричных указанным относительно главной диагонали, отмечаем знаком «плюс».

Пропускная способность найденного пути равна, очевидно, наименьшему среди чисел, отмеченных знаком «минус»:

$$\theta = \min\{c_{ij}^-\}.$$

В данном случае  $\theta_1 = 2$ .

Чтобы вычислить новые пропускные способности дуг найденного пути и симметричных им дуг, достаточно, согласно (8.3.5) и (8.3.6), из всех чисел, отмеченных знаком «минус», вычесть наименьшую пропускную способность  $\theta_1$ , а ко всем числам, отмеченным знаком «плюс», прибавить  $\theta_1$ . Получаем табл. 8.3.2 с измененными пропускными способностями дуг сети. Она соответствует рис. 8.3.1, а. По таблице находим путь

$$X_0 \rightarrow X_5 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_8,$$

отмечаем знаком «минус» пропускные способности дуг этого пути (они записаны в клетках на концах стрелок), знаком «плюс» — пропускные способности симметричных дуг. Находим  $\theta_2$  как наименьшее среди  $c_{ij}^-$ . Прибавляя  $\theta_2$  к  $c_{ij}^+$  и вычитая из  $c_{ij}^-$ , переходим к табл. 8.3.3 и т. д.

Выполнив еще четыре шага, приходим к табл. 8.3.4. Из этой таблицы видно, что не существует ни одного пути из источника в сток. Действительно, из  $X_0$  можно перейти в  $X_5$ . Далее, так как в пятой строке только два ненулевых элемента  $c_{50}$  и  $c_{54}$ , можно перейти либо в  $X_0$  (вернуться, что бессмысленно), либо в  $X_4$ . Но в четвертой строке только один элемент  $c_{45}$ , отличный от нуля. Поэтому из вершины  $X_4$  можно перейти только в  $X_5$ , т. е. опять появляется контур. Никаких других возможностей нет. Следовательно, увеличить поток нельзя.

Для определения полученного максимального потока вычитаем из элементов первой таблицы (см. табл. 8.3.1) соответствующие элементы последней (см. табл. 8.3.4). Записывая только положительные из найденных разностей, получаем табл. 8.3.5, указывающую максимальный поток в заданной сети с величиной  $w^* = z_{58} + z_{68} + z_{78} = 2 + 5 + 2 = 9$ .  $\square$

Таблица 8.3.3

$X_i \backslash X_j$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	•	1	4			2 <sup>-</sup>			
$X_1$		•		1	1 <sup>+</sup>	2 <sup>-</sup>			
$X_2$			•	2				3	
$X_3$				•			3		
$X_4$		1			•	4			
$X_5$	7 <sup>+</sup>				2 <sup>-</sup>	•			
$X_6$		2 <sup>+</sup>		3	2		•	2	5 <sup>-</sup>
$X_7$			2				2	•	2
$X_8$					4	3 <sup>+</sup>	2		•

Таблица 8.3.4

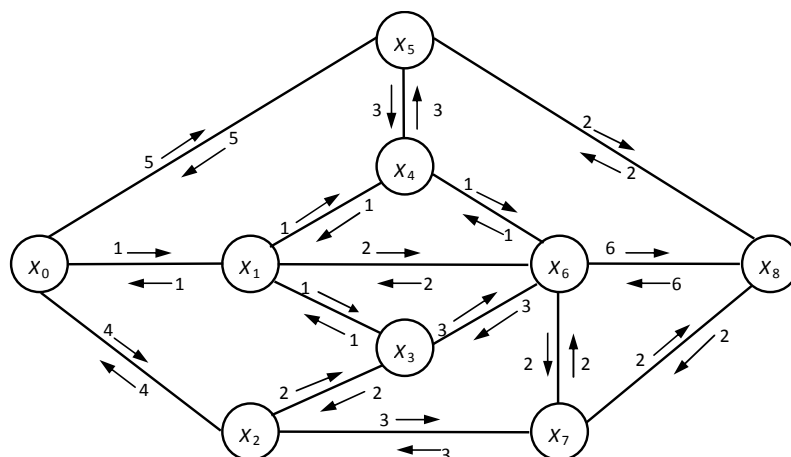
$X_i \backslash X_j$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	•					1			
$X_1$	1	•		1	2				
$X_2$	4		•					1	
$X_3$			2	•			1		
$X_4$					•	5			
$X_5$	8				1	•			
$X_6$		4		5	2		•	2	1
$X_7$			4				2	•	
$X_8$					4	7	4		•

Таблица 8.3.5

$X_i \backslash X_j$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	•	1	4			4			
$X_1$		•					2		
$X_2$			•	2				2	
$X_3$				•			2		
$X_4$		1			•		1		
$X_5$					2	•			2 <sup>-</sup>
$X_6$							•		5
$X_7$								•	2
$X_8$									•

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

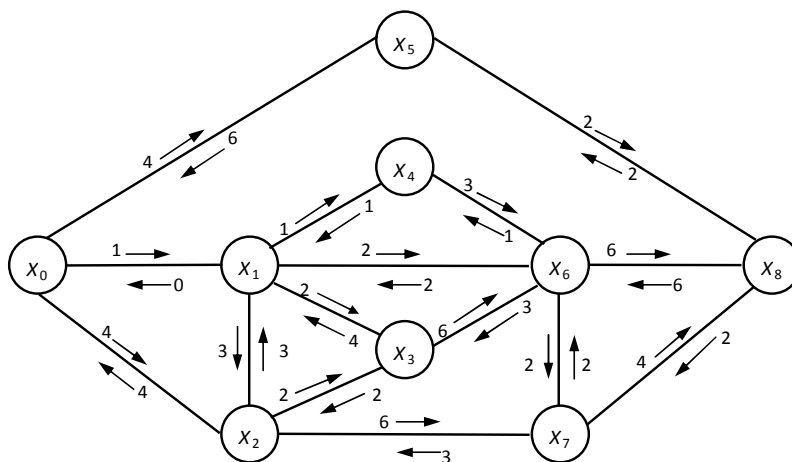
- Пункты  $X_0$  и  $X_8$  связаны сетью дорог, проходящих через промежуточные пункты. Стоимость проезда из пункта  $X_i$  в пункт  $X_j$  указана на графе. Определите минимальную стоимость проезда из  $X_0$  и  $X_8$ .



2. Основу строительства объекта составляют 12 операций, последовательность выполнения и продолжительность которых задана в таблице. Составьте сетевой график проекта и определите критический путь и скорейшее время завершения всего проекта.

Работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность
1	2, 3, 6	7
2	4, 8	7
3	9	9
4	10, 13	14
5	10, 11	11
6	7, 8, 9	8
7	11	10
8	10, 12	7
9	10, 11	13
10	12	15
11	—	9
12	—	10

3. Какой максимальный поток газа можно пропустить из пункта  $X_1$  в пункт  $X_8$  в единицу времени по сети газопровода, пропускные способности промежуточных дуг которого приведены на рисунке.



## ГЛАВА 9. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

### § 9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачи *многокритериальной (или векторной) оптимизации* возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием (например, стоимость, надежность и т. п.). Требуется найти точку области допустимых решений, которая минимизирует или максимизирует все эти критерии. Обозначим  $i$ -й частный критерий через  $z_i(\mathbf{x})$ , а область допустимых решений через  $Q$ . Учтем, что изменением знака функции всегда можно свести задачу минимизации к задаче максимизации, и наоборот, мы можем сформулировать кратко задачу векторной оптимизации следующим образом:

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \max, \quad (9.1.1)$$

$$\mathbf{x} \in Q. \quad (9.1.2)$$

Выбирая работу, человек, как правило, руководствуется несколькими критериями. Например, кому-то хочется, чтобы одновременно выполнялись такие условия:

- заработная плата была как можно выше;
- условия работы были как можно комфортнее;
- место работы было как можно ближе к дому.

Другим примером задачи с многими критериями является модернизация производства, в процессе которой хочется достигнуть максимального роста эффективности с наименьшими затратами.

Еще один пример — выбор инвестиционного решения, когда хочется получить максимальный доход (или доходность) при наименьшем риске.

Конечно, решения, которое одновременно удовлетворяло бы всем противоречивым требованиям, как правило, не существует. Но математика может помочь и при решении таких задач. Помощь эта состоит не в нахождении несуществующего решения, одновременно обращающего все критерии в максимум, а в отбрасывании заведомо плохих решений.

## § 9.2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО

В идеальном случае в задаче (9.1.1)—(9.1.2) можно вести поиск такого решения, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач. Но указанное пересечение обычно оказывается пустым множеством, и потому приходится рассматривать *переходное множество* — множество допустимых решений [т. е. удовлетворяющих требованию (9.1.2)], оптимальных по Парето.

Изучение понятия оптимальности по Парето начнем с частного случая двух критериев.

Обозначим буквой  $E$  некоторую обобщенную характеристику произвольной инвестиционной операции, которую назовем *эффективностью* операции (в качестве  $E$  можно взять доход, доходность в процентах от вложенной суммы, доходность в процентах годовых, внутреннюю норму доходности и т. п.). Часто невозможно заранее точно предсказать эффективность той или иной операции, и такие операции рассматривают как случайные величины. При этом в качестве *ожидаемой эффективности* такой инвестиционной операции используют математическое ожидание  $ME$  случайной величины  $E$ .

Под *риском* инвестиционных операций мы понимаем отклонение реальных значений эффективности инвестиционной операции от прогнозируемой эффективности (как в меньшую сторону, так и в большую).

Если  $E$  — случайная эффективность инвестиционной операции, и в качестве ожидаемой эффективности операции мы выбрали математическое ожидание  $ME$  случайной величины  $E$ , то в качестве *меры риска* операции естественно взять среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_E = \sqrt{DE}$$

(здесь  $DE$  — дисперсия случайной величины  $E$ ).

Знание только математических ожиданий и средних квадратичных отклонений случайных величин довольно-таки важно при анализе группы случайных величин, оно помогает выбрать из множества случайных величин оптимальные по Парето, отбросив заведомо «плохие».

Пусть на финансовом рынке существует возможность осуществить несколько инвестиционных операций, ожидаемые эффективности и риски которых известны и равны соответственно  $ME_1, ME_2, \dots, ME_n$  и  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ .

Говорят, что  $i$ -я операция *доминирует*  $j$ -ю, если

$$\begin{cases} ME_i \geq ME_j, \\ \sigma_i < \sigma_j \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ME_i > ME_j, \\ \sigma_i \leq \sigma_j. \end{cases}$$

Операция называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

**ПРИМЕР 9.2.1.** Инвестор рассматривает четыре инвестиционные операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами  $E_1, E_2, E_3, E_4$  с рядами распределения

$E_1$	2	5	8	4
$p$	1/6	1/2	1/6	1/6
$E_2$	2	3	4	12
$p$	1/2	1/6	1/6	1/6
$E_3$	3	5	8	10
$p$	1/6	1/6	1/2	1/6
$E_4$	1	2	4	8
$p$	1/2	1/6	1/6	1/6

Требуется определить, какие из этих операций оптимальны по Парето.

**Решение.** Ожидаемые эффективности и риски равны соответственно  $ME_1 = 4,81$ ,  $\sigma_1 = 1,77$ ,  $ME_2 = 4,16$ ,  $\sigma_2 = 3,57$ ,  $ME_3 = 7,00$ ,  $\sigma_3 = 2,30$ ,  $ME_4 = 2,81$ ,  $\sigma_4 = 2,54$ . Нанесем точки  $(ME_i; \sigma_i)$  на единый график (рис. 9.2.1).  $i$ -я операция доминирует  $j$ -ю, если точка, соответствующая  $i$ -й операции, находится на графике правее и ниже точки, соответствующей  $j$ -й операции.

Видно, что первая операция доминирует вторую и четвертую, третья операция также доминирует вторую и четвертую. При этом первая операция не доминирует третью, а третья не доминирует первую. Первая и третья операции, таким образом, оптимальны по Парето.  $\square$

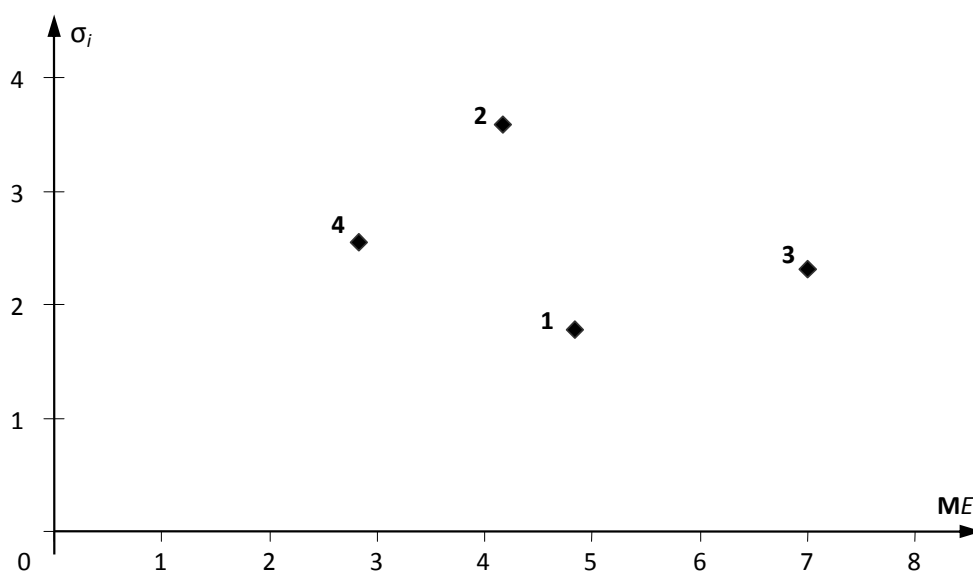


Рис. 9.2.1. График «риск — доходность»

Отметим, что операции, оптимальные по Парето, не обязательно являются «самыми лучшими» (и даже просто «хорошими») — эти операции не являются худшими. Выбор операций среди оптимальных по Парето осуществляется на основе склонности лица, принимающего соответствующее решение, к риску.

В некоторых ситуациях предпочтительной оказывается операция, в которой ожидаемая эффективность вообще отрицательна. Например, если перед нами стоит выбор из двух операций:

- потерять 1 руб.;
- с вероятностью 0,5 получить 1 000 000 руб. и с вероятностью 0,5 потерять 100 000 руб.,

то обе эти операции окажутся оптимальными по Парето ( $ME_1 = -1$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $ME_2 = 450\,000$ ,  $\sigma_2 = 450\,000$ ), но, скорее всего, мы склонимся к выбору первой операции, несмотря на то, что ожидаемый доход по ней составляет отрицательное число (–1 руб.), тогда как ожидаемый доход от исполнения второй операции составляет 450 000 руб. — слишком велик риск у второй операции, слишком велика вероятность больших потерь.

Рассмотренный подход может быть применен при анализе любых других задач многокритериальной оптимизации.

В произвольной задаче выбора наилучшей альтернативы по нескольким критериям (9.1.1)—(9.1.2) решение  $\mathbf{x}^{(1)} \in Q$  доминирует решение  $\mathbf{x}^{(2)} \in Q$ , если  $\mathbf{x}^{(1)}$  по каждому из критериев не хуже  $\mathbf{x}^{(2)}$  и хотя бы по одному из критериев — строго лучше:

- $z_i(\mathbf{x}^{(1)}) \geq z_i(\mathbf{x}^{(2)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;
- существует такой критерий  $j$ , что  $z_j(\mathbf{x}^{(1)}) > z_j(\mathbf{x}^{(2)})$ .

Решение  $\mathbf{x} \in Q$  называется *оптимальным по Парето*, если не существует решений, которые бы его доминировали.

**ПРИМЕР 9.2.2.** Дана задача многокритериальной оптимизации:

$$\begin{aligned} z_1 &= -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ z_2 &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

$$z_3 = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \tag{9.2.2}$$

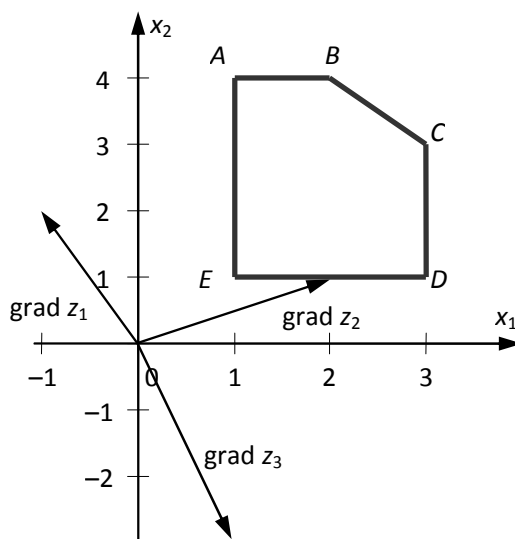
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 1 \leq x_1 \leq 3, \\ 1 \leq x_2 \leq 4. \end{cases} \tag{9.2.3}$$

Требуется найти множество решений, оптимальных по Парето.

**Решение.** Очевидно, в данной задаче множество Парето совпадает с областью допустимых решений [т. е. точек, удовлетворяющих условиям (9.2.1), они соответствуют пятиугольнику  $ABCDE$  на рис. 9.2.1,  $a$ ].

Действительно, возьмем любую точку множества допустимых решений. Если мы от нее сдвинемся вправо, то значения критериев  $z_2$  и  $z_3$  увели-

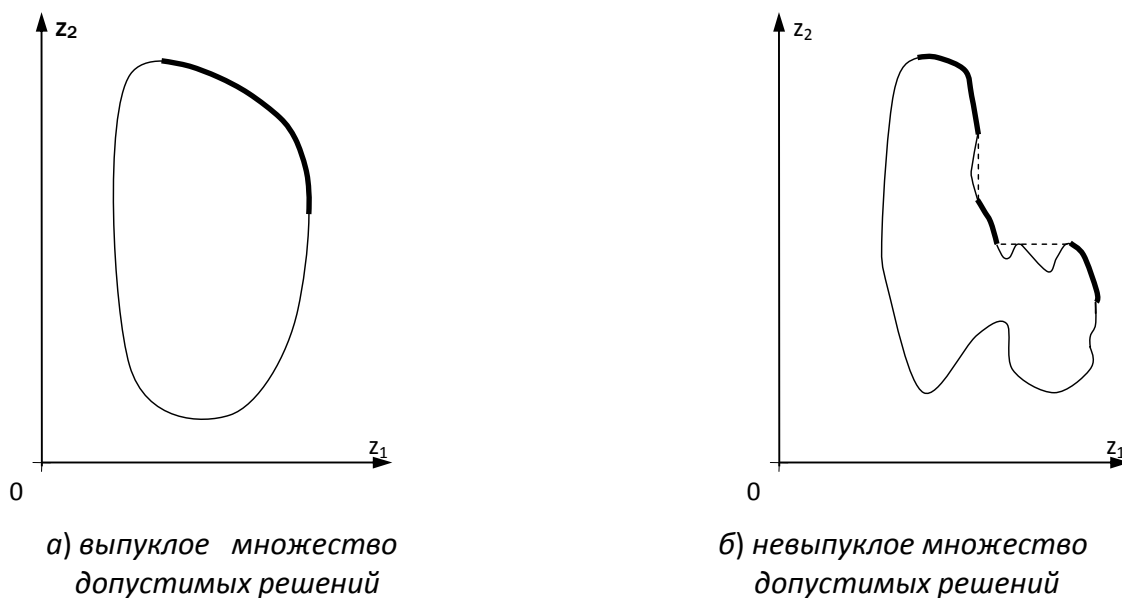
чатся, но значение критерия  $z_1$  уменьшится. Если мы сдвинемся левее, то значения критериев  $z_2$  и  $z_3$  уменьшатся, но значение критерия  $z_1$  увеличится. Если мы сдвинемся ниже, то значения критериев  $z_1$  и  $z_2$  увеличатся, но значение критерия  $z_3$  уменьшится. Если мы сдвинемся выше, то значения критериев  $z_1$  и  $z_2$  уменьшатся, но значение критерия  $z_3$  увеличится.



**Рис. 9.2.2.** Переговорное множество, совпадающее с множеством допустимых решений

Таким образом, ни одна из точек множества допустимых решений не доминируется другими, т. е. все допустимые точки оптимальны по Парето.  $\square$

Рис. 9.2.3 иллюстрирует типичные варианты того, как выглядит множество Парето в случае выпуклого и невыпуклого множества допустимых решений (оптимальные по Парето решения выделены жирным).



**Рис. 9.2.3.** Варианты конфигурации множества Парето

### § 9.3. СУБОПТИМИЗАЦИЯ

Выбор конкретного решения из *переговорного множества* — множества допустимых решений, оптимальных по Парето, предоставляется человеку — лицу, принимающему решение (и несущему за него ответственность).

Однако часто переговорное множество оказывается чересчур громоздким и проанализировать все возможные варианты за разумное время невозможно.

В таких ситуациях пользуются некоторыми специальными приемами, сужающими множество Парето (в идеале — до одного решения).

**Субоптимизация** состоит в том, что выделяется один максимизируемый критерий (с номером  $k$ ), а для остальных критериев (с номерами  $i \neq k$ ) задаются нижние границы  $\gamma_i$ :

$$\begin{aligned} z_k(\mathbf{x}) &\rightarrow \max, \\ \mathbf{x} &\in Q, \\ z_i(\mathbf{x}) &\geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, m. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 9.3.1.** Требуется решить задачу многокритериальной оптимизации из примера 9.2.2 методом субоптимизации, приняв первый критерий за основной, а для второго и третьего критерия задав нижние границы равными  $\gamma_2 = 4$  и  $\gamma_3 = -8$ .

**Решение.** Задача, полученная из исходной путем добавления по второму и третьему критериям ограничений снизу, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1 = -x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 1 \leq x_1 \leq 3, \\ 1 \leq x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - 3x_2 \geq -8. \end{cases} \end{aligned}$$

Градиент целевой функции и множество допустимых решений этой задачи представлены на рис. 9.3.1, из которого очевидно, что

$$\mathbf{x}^{\text{суб.}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$z_1 = 5, \quad z_2 = 5, \quad z_3 = -8. \quad \square$$

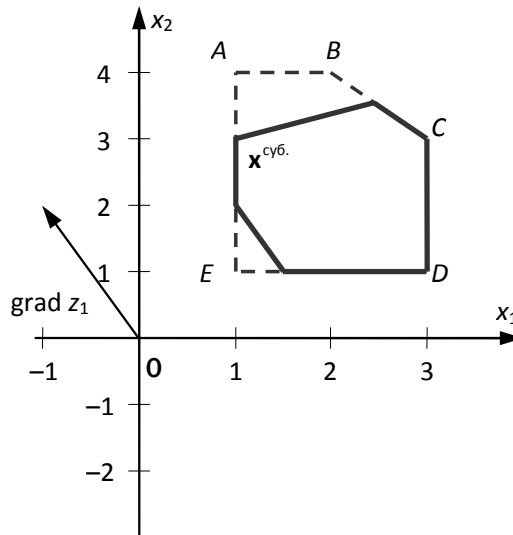


Рис. 9.3.1. Субоптимизация

## § 9.4. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

**Лексикографическая оптимизация** предполагает, что критерии упорядочены по относительной важности. На первом шаге из множества Парето выделяются решения, имеющие максимальную оценку по важнейшему критерию, и если такое решение единственно, оно считается оптимальным. Если же таких решений не одно, то среди них отбирают те, которые имеют максимальную оценку по следующему критерию, и т. д.

**ПРИМЕР 9.4.1.** Требуется решить задачу из примера 9.2.2 методом лексикографической оптимизации.

**Решение.** Из рис. 9.2.2 очевидно, что решение, имеющее максимальную оценку по первому критерию, единственно и находится в точке А, т. е.

$$\mathbf{x}^{\text{лекс.}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$z_1 = 7, \quad z_2 = 6, \quad z_3 = -11. \quad \square$$

## § 9.5. СВЕРТКА КРИТЕРИЕВ

**Метод обобщенного критерия** предлагает перейти от  $m$  частных критериев к так называемой *свертке критериев*:

$$w = \sum_{i=1}^m \alpha_i z_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max,$$

$$\mathbf{x} \in Q,$$

где веса  $\alpha_i$  определяют важность критериев.

**ПРИМЕР 9.5.1.** Требуется решить задачу из примера 9.2.2 методом обобщенного критерия, считая веса критериев равными  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0,25$ .

**Решение.** Максимум обобщенного критерия

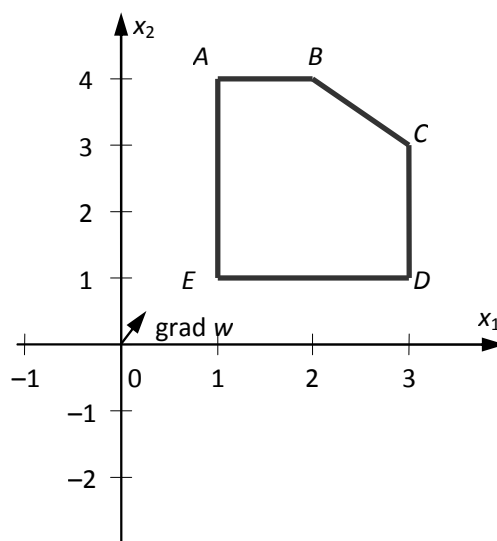
$$\begin{aligned} w &= 0,5z_1 + 0,25z_2 + 0,25z_3 = \\ &= 0,5(-x_1 + 2x_2) + 0,25(2x_1 + x_2) + 0,25(x_1 - 3x_2) = 0,25(x_1 + 2x_2) \end{aligned}$$

на множестве допустимых решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 1 \leq x_1 \leq 3, \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

достигается, как видно из рис. 9.2.2, в точке  $B$ :

$$\mathbf{x}^{\text{сверт.}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



**Рис. 9.5.1.** Свертка критериев

При этом

$$z_1 = 6, \quad z_2 = 8, \quad z_3 = -16. \quad \square$$

## § 9.6. МЕТОД ИДЕАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Метод идеальной точки** состоит в поиске решения  $\mathbf{x}$  из множества Парето, для которого значения критериев как можно меньше отклоняются от своих оптимальных значений. Иными словами, от задачи (9.1.1)—(9.1.2) переходят к задаче

$$\rho(\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{z}^*) \rightarrow \min, \\ \mathbf{x} \in Q,$$

где

$$\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}^{(1)}) \\ z_2(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ z_m(\mathbf{x}^{(m)}) \end{pmatrix},$$

а  $\mathbf{x}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — решения задач

$$z_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{x} \in Q.$$

**ПРИМЕР 9.6.1.** Требуется решить задачу из примера 9.2.2 методом идеальной точки.

**Решение.** Из рис. 9.2.2 очевидно, что оптимальными по первому, второму и третьему критериям являются соответственно точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при этом  $z_1(\mathbf{x}^{(1)}) = 7$ ,  $z_2(\mathbf{x}^{(2)}) = 9$ ,  $z_3(\mathbf{x}^{(3)}) = 0$ , поэтому идеальная точка

$$\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Расстояние от произвольной точки

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}.$$

до идеальной точки равно

$$\rho(\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{z}^*) = (-x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 9)^2 + (x_1 - 3x_2 - 0)^2$$

Точкой, доставляющей минимум функции  $\rho(\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{z}^*)$  на множестве допустимых решений исходной задачи (9.2.1) является (как можно проверить, например, с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel) точка

$$\mathbf{x}^{\text{ид.}} = \begin{pmatrix} 2,97 \\ 2,28 \end{pmatrix}.$$

В этой точке

$$w = 44,85, \quad z_1 = 1,59, \quad z_2 = 8,22, \quad z_3 = -3,87. \quad \square$$

## § 9.7. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК

**Метод последовательных уступок** решения многокритериальных задач применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывающей важности. Предположим, что все критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Вначале определяется максимальное значение  $z_1^*$ , первого по важности критерия в области допустимых решений, решив задачу

$$z_1(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{x} \in Q.$$

Затем назначается, исходя из практических соображений и принятой точности, величина допустимого отклонения  $\delta_1 > 0$  (экономически оправданной уступки) критерия  $z_1$  и отыскивается максимальное значение второго критерия  $z_2$  при условии, что значение первого должно отклоняться от максимального не более чем на величину допустимой уступки, т. е. решается задача

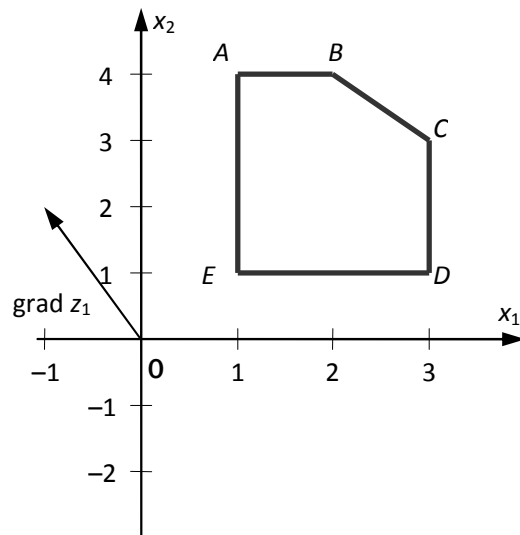
$$z_2(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \\ z_1(\mathbf{x}) \geq z_1^* - \delta_1, \\ \mathbf{x} \in Q.$$

Снова назначается величина уступки  $\delta_2 > 0$  по второму критерию, которая вместе с первой используется при нахождении условного экстремума третьего частного критерия, и т. д. Наконец, выявляется экстремальное значение последнего по важности критерия  $z_m$  при условии, что значение каждого из первых  $m - 1$  частных критериев отличается от экстремального не более чем на величину допустимой уступки. Получаемое на последнем этапе решение считается оптимальным.

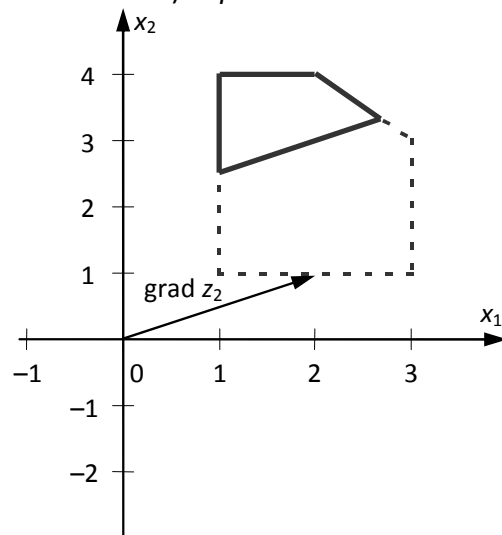
Существенным недостатком метода последовательных уступок является то, что решение, полученное этим методом, может оказаться неоптимальным по Парето.

**ПРИМЕР 9.7.3.** Требуется решить задачу из примера 9.2.2 методом последовательных уступок, приняв допустимые уступки по первым двум критериям равными  $\delta_1 = 3$  и  $\delta_2 = 5/3$ .

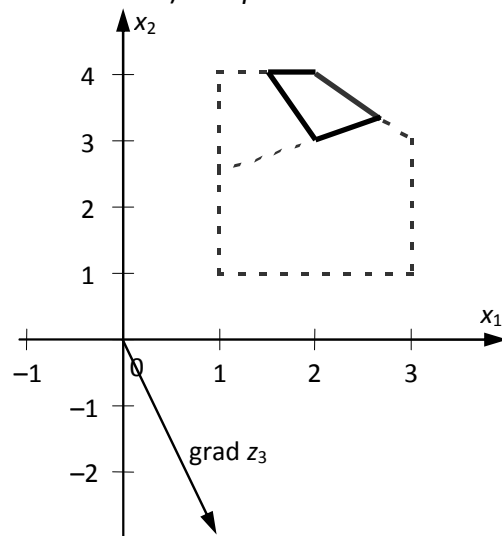
**Решение.** Максимизируем функцию  $z_1$  при условиях (9.2.1). Это легко сделать графически (рис. 9.7.1, а).



а) первый шаг



б) второй шаг



в) третий шаг

**Рис. 9.7.1.** Решение задачи многокритериальной оптимизации методом последовательных уступок

Получаем:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad z_1^* = z_1(A) = 7.$$

Переходим к максимизации функции  $z_2$  при условиях (9.2.1) и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию  $z_1$  нельзя уступать более чем на  $\delta_1$ . Так как  $z_1^* - \delta_1 = 4$ , то дополнительное ограничение будет иметь вид

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4. \quad (9.7.1)$$

Задачу максимизации функции  $z_2$  при условиях (9.2.1) и (9.7.1) решим графически (рис. 9.7.1, б):

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}, \quad z_2^* = z_2(B) = \frac{26}{3}.$$

Теперь уступаем по критерию  $z_2$  на  $\delta_2$  и получаем второе дополнительное ограничение:

$$2x_1 + x_2 \geq 7 \quad (9.7.2)$$

Максимизируем  $z_3$  при условиях (9.2.1), (9.7.1) и (9.7.2) графически (рис. 9.7.1, в), получаем оптимальное решение трехкритериальной задачи

$$\mathbf{x}^{\text{уст.}} = \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$z_1 = 4, \quad z_2 = 7, \quad z_3 = -7. \quad \square$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Определите инвестиционные операции, оптимальные по Парето по критериям «эффективность — риск», если случайные эффективности этих операций определяются следующими рядами распределения:

$$\begin{array}{c|cccc} E_1 & 0 & 2 & 4 & 16 \\ \hline p & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} E_2 & 0 & 4 & 6 & 12 \\ \hline p & 1/4 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \end{array},$$

$$\begin{array}{c|cccc} E_3 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ \hline p & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} E_4 & 0 & 4 & 6 & 10 \\ \hline p & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{array}.$$

2. Известны функции полезности двух участников рынка таковы:  $u_1(x_1, x_2)$  и  $u_2(x_1, x_2)$ , у первого участника имеется 1 единица первого товара и 4 единицы второго товара. Товары являются безгранично делимыми, и участники могут ими обмениваться с целью увеличения полезности имеющегося у них набора товаров. Найдите множество точек окончательного (неулучшаемого) распределения товара, оптимальных по Парето в следующих случаях: а)  $u_1(x_1, x_2) = , = u_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 3x_2\}$ ; б)  $u_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}, u_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$ ; в)  $u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ; г)  $u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ .
3. Информационно-технологическая компания может заниматься проектами по разработке информационных систем и внедрению систем сторонних производителей. Сотрудники компании являются универсалами и способны выполнять любой вид работ и их заработная плата от вида выполняемых работ не зависит. Проекты по разработке новой информационной системы занимают в среднем 100 человеко-дней и приносит 400 тыс. руб. прибыли, а проекты по внедрению занимают в среднем 50 человеко-дней и приносят 150 тыс. руб. прибыли. Годовой ресурс работы фирмы составляет 1000 человеко-дней, причем заказы и на разработку, и на внедрение есть всегда. Фирма хочет получить как можно больше клиентов и на рынке разработки, и на рынке внедрения, при этом естественной целью является также максимизация прибыли. Сформулируйте задачу многокритериальной оптимизации, найдите множество решений, оптимальных по Парето, определите решения, получаемые с помощью субоптимизации, лексикографической оптимизации, метода свертки критериев, метода идеальной точки и метода последовательных уступок (необходимые параметры методов выберите, исходя из здравого смысла).
4. Для каждой из данных задач многокритериальной оптимизации найдите множество решений, оптимальных по Парето, определите решения, получаемые с помощью субоптимизации, лексикографической оптимизации, метода свертки критериев, метода идеальной точки и метода последовательных уступок (необходимые параметры методов выберите, исходя из здравого смысла):

$$\begin{array}{ll}
 z_1 = x_1 \rightarrow \max, & z_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\
 z_2 = -x_1 + x_2 \rightarrow \max, & z_2 = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\
 z_3 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, & z_3 = x_2 \rightarrow \min, \\
 \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 5, \\ 1 \leq x_1 \leq 4, \\ 1 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}
 \end{array}$$

## **ГЛАВА 10. ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

### **§ 10.1. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ**

В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются **конфликтными**.

Приведем несколько примеров конфликтных ситуаций: борьба фирм за рынок сбыта, аукцион, спортивные состязания, военные операции, парламентские выборы (при наличии нескольких кандидатов), карточные игры.

Простейшим примером конфликтной ситуации является игра с нулевой суммой (или **антагонистическая игра**), в которой выигрыш одной стороны конфликта в точности совпадает с проигрышем другой стороны.

Рассмотрим конфликт двух участников с противоположными интересами, математической моделью которого является **игра с нулевой суммой**. Участники игры — лица, принимающие решения, — называются *игроками*. *Стратегия* игрока — это осознанный выбор одного из множества возможных вариантов его действий. Будем рассматривать **конечные** игры, в которых множества стратегий игроков конечны; стратегии первого игрока пронумеруем числами от 1 до  $m$ , а стратегии второго игрока — числами от 1 до  $n$ .

Если первый игрок выбрал свою  $i$ -ю стратегию, а второй игрок — свою  $j$ -ю стратегию, то результатом такого совместного выбора будет **платеж**  $a_{ij}$  второго игрока первому (это не обязательно денежная сумма, а любая оценка полезности результата выбора игроками своих стратегий  $i$  и  $j$ ). Таким образом, конечная игра с нулевой суммой однозначно определяется матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (10.1.1)$$

которая называется *платежной матрицей* (или *матрицей выигрышей*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго игрока. Конечные игры с нулевой суммой называются *матричными*, так как целиком определяются своими платежными матрицами.

Игра происходит партиями. *Партия* игры состоит в том, что игроки одновременно называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы  $\mathbf{A}$  (по своему выбору или случайно), а второй — некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору или случайно). После этого происходит «расплата». Пусть, например, первый игрок назвал номер  $i$ , а второй —  $j$ . Тогда второй игрок платит первому сумму  $a_{ij}$ . На этом партия игры заканчивается. Если  $a_{ij} > 0$ , то это означает, что при выборе первым игроком  $i$ -й стратегии, а вторым  $j$ -й выигрывает первый игрок; если же  $a_{ij} < 0$ , то это значит, что при данном выборе стратегий в выигрыше оказывается второй игрок. Цель каждого игрока — выиграть как можно большую сумму в результате большого числа партий.

Смысл названий «конфликт с противоположными интересами» и «игра с нулевой суммой» состоит в том, что выигрыш каждого из игроков противоположен выигрышу противника, или, иначе, что сумма выигрышей игроков равна нулю.

Стратегия называется *чистой*, если выбор игрока неизменен от партии к партии. У первого игрока, очевидно, есть  $m$  чистых стратегий, а у второго —  $n$ .

При анализе игр противник считается сильным, т. е. разумным.

Рассмотрим описанную конфликтную ситуацию с точки зрения первого игрока. Если мы (т. е. первый игрок) выбираем свою  $i$ -ю стратегию ( $i$ -ю строку матрицы  $\mathbf{A}$ ), то второй игрок, будучи разумным, выберет такую стратегию  $j$ , которая обеспечит ему наибольший выигрыш (а нам, соответственно, наименьший), т. е. он выберет такой столбец  $j$  матрицы  $\mathbf{A}$ , в котором платеж  $a_{ij}$  (второго игрока первому) минимален. Переберем все наши стратегии  $i = 1, 2, \dots, m$  и выберем ту из них, при которой второй игрок, действуя максимально разумно, заплатит нам наибольшую сумму. Величина

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$$

называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ей стратегия первого игрока — *максиминной*. Аналогичные рассуждения (но уже с точки зрения второго игрока) определяют *верхнюю цену игры*

$$\beta = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$$

и соответствующую ей *минимаксную стратегию* второго игрока. Подчеркнем, что по своему определению нижняя цена игры  $\alpha$  представляет собой максимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т. е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший  $\alpha$ ), а верхняя цена — величину, противоположную минимальному гарантированному проигрышу второго игрока [т. е. применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше чем  $\beta$ , или, по-другому, выиграет не меньше чем  $(-\beta)$ ].

Если  $\alpha = \beta$ , то говорят, что игра имеет *седловую точку в чистых стратегиях*, общее значение  $\alpha$  и  $\beta$  называется при этом *ценой игры* и обозначается  $v = \alpha = \beta$ . При этом стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее  $v$ , а второму игроку — гарантированный проигрыш не более  $(-v)$ , и отклоняться игрокам от этих стратегий невыгодно.

**ПРИМЕР 10.1.1.** В платежной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

указано, какую долю рынка выиграет предприятие у своего единственного конкурента, если оно будет действовать согласно каждой из возможных трех стратегий, а конкурент — согласно каждой из своих возможных трех стратегий. Требуется определить, имеет ли данная игра седловую точку в чистых стратегиях.

**Решение.** Припишем справа от строк платежной матрицы минимальные элементы этих строк (соответствующие выигрышу первого игрока в том случае, когда он выберет стратегию, соответствующую данной строке, а второй игрок при этом выберет стратегию, соответствующую наилучшему для него выигрышу); под столбцами платежной матрицы напишем максимальные элементы этих столбцов (соответствующие проигрышу второго игрока в том случае, когда он выберет стратегию, соответствующую данному столбцу, а первый игрок при этом выберет стратегию, соответствующую наилучшему для него выигрышу):

$$\begin{array}{ccc}
 \left( \begin{array}{ccc} 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & \boxed{0,3} \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 0,1 \\ \boxed{0,3 = \alpha} \\ 0,1 \end{array} \\
 0,5 & 0,4 & \boxed{\begin{array}{c} 0,3 \\ \parallel \\ \beta \end{array}}
 \end{array}$$

Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max\{0,1, 0,3, 0,1\} = 0,3$$

соответствует второй стратегии первого игрока, а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min\{0,5, 0,4, 0,3\} = 0,3$$

соответствует третьей стратегии второго игрока, поэтому если первый игрок будет действовать со второй стратегией, а второй игрок — с третьей стратегией, то игроки могут гарантировать себе: первый — выигрыш не менее  $v = \alpha = \beta = 0,3 = 30\%$  рынка, а второй — что первый выиграет не более  $v = 30\%$  рынка.

Таким образом, данная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях (в платежной матрице седловая точка обведена рамкой), при этом оптимальная чистая стратегия первого игрока — вторая, оптимальная чистая стратегия второго игрока — третья, а цена игры равна  $v = 0,3$ .

Если первый игрок будет следовать своей оптимальной чистой стратегии (второй), а второй игрок отклонится от своей оптимальной чистой стратегии (от третьей) и выберет первую или вторую, то он только ухудшит свое положение — будет проигрывать не 30%, а 50% рынка (при выборе первой стратегии) или 40% рынка (при выборе второй стратегии). Первому игроку также невыгодно отклоняться от своей второй стратегии, если второй игрок будет придерживаться третьей стратегии.  $\square$

Матричная игра совершенно не обязательно имеет седловую точку в чистых стратегиях, в чем можно убедиться из рассмотрения следующего примера.

**ПРИМЕР 10.1.2 (Игра «УГАДЫВАНИЕ МОНЕТЫ»).** Правила игры таковы. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб. по своему выбору и незаметно от второго игрока, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб. Требуется доказать, что данная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях.

**Решение.** Платежная матрица, очевидно, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверим, есть ли в игре седловая точка в чистых стратегиях. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-1, -5\} = -1,$$

а верхняя цена игры

$$\beta = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{3, 3\} = 3,$$

т. е.  $\alpha \neq \beta$ , и седловой точки (в чистых стратегиях) в игре нет.  $\square$

**ТЕОРЕМА.** В любой матричной игре нижняя цена не превосходит верхней:  $\alpha \leq \beta$ .

**Доказательство.** Очевидно, что любой элемент  $a_{ij}$  платежной матрицы не меньше минимального элемента  $i$ -й строки:  $a_{ij} \geq \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$  и не больше максимального элемента  $j$ -го столбца:  $a_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$ . Таким образом,  $\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$ , откуда  $\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$ . Левая часть этого неравенства зависит от номера строки  $i$ , а правая часть не зависит, поэтому для любого столбца  $j$   $\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$  или  $\alpha \leq \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$  (одновременно для всех  $j$ ). Но это означает, что  $\alpha \leq \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$  или, окончательно,  $\alpha \leq \beta$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Как же поступать, когда нижняя цена матричной игры  $\alpha$  строго меньше верхней цены  $\beta$ , т. е. когда в игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях?

*Смешанной стратегией* первого игрока называется вектор  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , где все  $p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . При этом  $p_i$  — вероятность, с которой первый игрок выбирает свою  $i$ -ю стратегию. Аналогично определяется смешанная стратегия  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  второго игрока. Чистая стратегия также подпадает под определение смешанной — в этом случае все вероятности равны нулю, кроме одной, равной единице.

Если игроки играют со своими смешанными стратегиями  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  соответственно, то математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

(и совпадает с математическим ожиданием проигрыша второго игрока).

Стратегии  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$  и  $\mathbf{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$  называются *оптимальными смешанными стратегиями* соответственно первого и второго игрока, если

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}).$$

Если у обоих игроков есть оптимальные смешанные стратегии, то пара  $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  называется *решением игры* (или *седловой точкой в смешанных стратегиях*), а число  $v = M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  — *ценой игры*.

**ПРИМЕР 10.1.3.** Требуется найти решение игры из примера 10.1.2 в смешанных стратегиях.

Решение. Платежная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

была построена ранее.

Пусть первый игрок выбирает свою первую стратегию с вероятностью  $p \in [0, 1]$ , а вторую стратегию — соответственно с вероятностью  $(1 - p)$ , т. е. первый игрок играет со смешанной стратегией  $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ .

Обозначим  $v_j(p)$  ожидаемый выигрыш (т. е. математическое ожидание выигрыша) первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою  $j$ -ю стратегию. В нашем случае  $v_1(p) = (-1)p + 3(1 - p)$ ,  $v_2(p) = 3p + (-5)(1 - p)$ . Построим графики этих функций на рис. 10.1.1, а [удобно строить эти графики, последовательно подставляя вместо  $p$  нуль и единицу, например, для первой функции при  $p = 0$  получаем  $v_1(0) = 3$ , а при  $p = 1$  будем иметь  $v_1(1) = -1$ ].

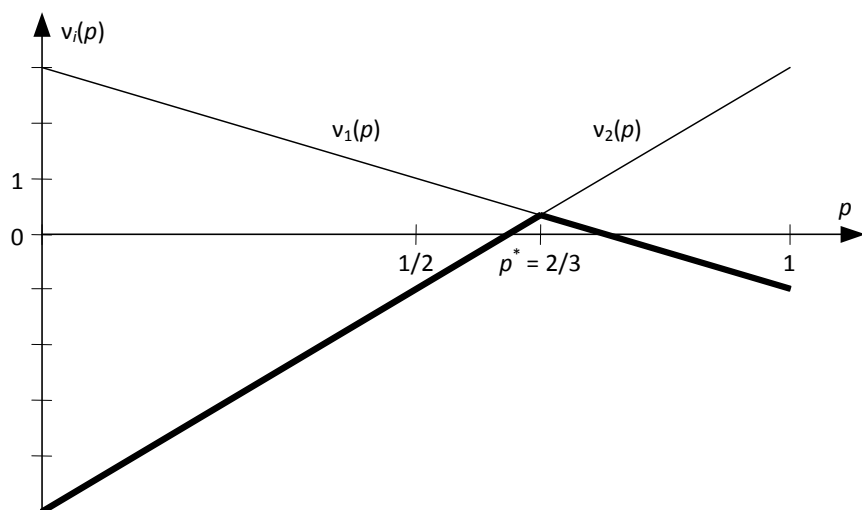
Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш:

$$v(p) = \min\{v_1(p), v_2(p)\}$$

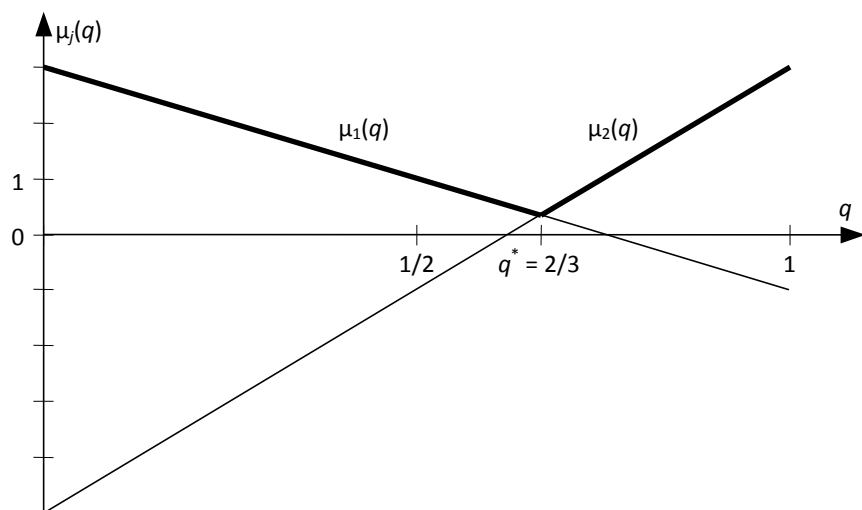
(эта функция отмечена на рис. 10.1.1, а жирной линией). Иными словами, второй игрок в любом случае заставит первого выиграть как можно меньше, т. е. в рассматриваемой игре при  $p \leq p^*$  [где  $p^*$  соответствует максимуму функции  $v(p)$ ] второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать  $v_2(p)$ , при  $p \geq p^*$  второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать  $v_1(p)$ . Наилучший для первого игрока выбор соответствует  $v = \max_{p \in [0, 1]} v(p)$ ,

т. е.  $p = p^*$ , при этом цена игры равна  $v$ .

В нашем случае  $p^* = 2/3$  [эта точка определяется из условия  $v_1(p) = v_2(p)$  или  $-p + 3(1-p) = 3p - 5(1-p)$ ]. Таким образом, оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия  $\mathbf{p}^* = (2/3, 1/3)$ , при этом цена игры равна  $v = v_1(2/3) = v_2(2/3) = 1/3$  — вне зависимости от того, какую стратегию выберет второй игрок, первый игрок будет выигрывать в среднем за большое число партий по 1/3 руб. за одну партию.



а) гарантированный выигрыш первого игрока в зависимости от его смешанной стратегии



б) верхняя граница проигрыша второго игрока в зависимости от его смешанной стратегии

**Рис. 10.1.1.** Гарантированный выигрыш первого игрока и верхняя граница проигрыша второго игрока в игре «Угадывание монеты» в зависимости от их смешанных стратегий

Найдем теперь оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Пусть он выбирает первую стратегию с вероятностью  $q \in [0, 1]$ , а вторую — с вероятностью  $(1 - q)$ , т. е. вектор смешанной стратегии второго игрока

имеет вид  $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$ . Тогда проигрыш второго игрока равен  $\mu_1(q) = -q + 3(1 - q)$ , если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и  $\mu_2(q) = 3q - 5(1 - q)$ , если первый игрок выбирает свою вторую стратегию (см. рис. 10.1.1, б).

Наилучшее с точки зрения второго игрока значение  $q$  определяется из условия  $\min_{q \in [0, 1]} \max \{\mu_1(q), \mu_2(q)\}$ . Как видно из рис. 10.1.1, б, это означает в данном случае, что  $\mu_1(q) = \mu_2(q)$ , откуда  $q^* = 2/3$ . Поэтому оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна  $\mathbf{q}^* = (2/3, 1/3)$ .  $\square$

**ПРИМЕР 10.1.4.** Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков.

Решение. Вначале проверим, имеет ли данная игра седловую точку в чистых стратегиях. Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2,3,4} a_{ij} = \max\{-2, -4\} = -2,$$

а верхняя цена

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2} a_{ij} = \min\{2, 3, 4, 1\} = 1,$$

т. е.  $\alpha \neq \beta$ , значит, седловой точки в чистых стратегиях в игре нет.

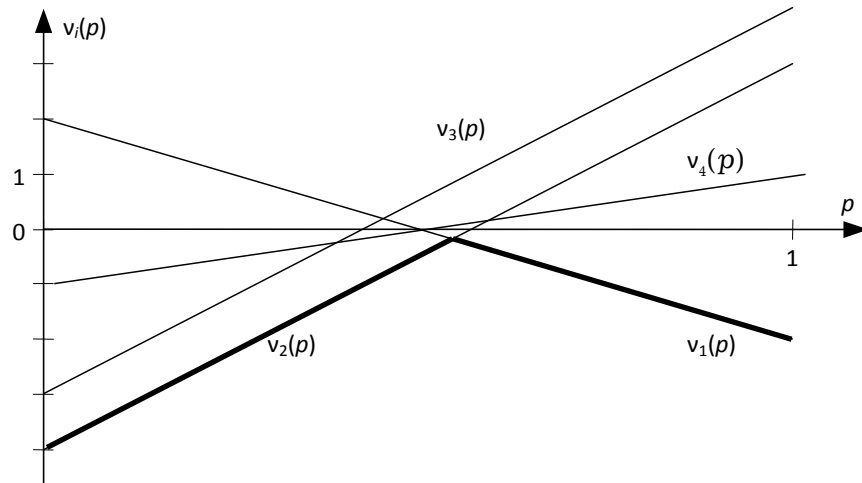
Пусть первый игрок играет со смешанной стратегией  $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ .

Обозначим  $v_j(p)$  ожидаемый выигрыш первого игрока, если второй игрок при этом выберет свою  $j$ -ю стратегию. В нашем случае

$$\begin{aligned} v_1(p) &= (-2)p + 2(1 - p), & v_2(p) &= 3p + (-4)(1 - p), \\ v_3(p) &= 4p + (-3)(1 - p), & v_4(p) &= p + (-1)(1 - p). \end{aligned}$$

Графики этих функций построены на рис. 10.1.2.

Второй игрок так выбирает свои стратегии, чтобы обеспечить первому минимальный выигрыш:  $v(p) = \min\{v_1(p), v_2(p), v_3(p), v_4(p)\}$  (эта функция отмечена на рис. 10.1.2 жирной линией). Иными словами, при  $p \in [0, p^*)$  [где  $p^* = 6/11$  определяется из условия  $v_1(p) = v_2(p)$ ] второй игрок будет выбирать свою вторую стратегию, и первый игрок будет выигрывать  $v_2(p)$ , при  $p \in (p^*, 1]$  второй игрок будет выбирать первую стратегию, и первый игрок будет выигрывать  $v_1(p)$ . Наилучший для первого игрока выбор при этом соответствует  $v = \max_{p \in [0, 1]} v(p)$ . Итак, оптимальной смешанной стратегией первого игрока является стратегия  $\mathbf{p}^* = (6/11, 5/11)$ , при этом цена игры равна  $v = v_1(6/11) = v_2(6/11) = -2/11$ .



**Рис. 10.1.2.** Гарантированный выигрыш первого игрока в примере 10.1.4 при различном выборе смешанной стратегии

Отметим, что второй игрок, действуя разумно, никогда не будет выбирать третью и четвертую стратегии, поэтому вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока имеет вид  $(q, 1 - q, 0, 0)$ .

Тогда проигрыш второго игрока равен  $\mu_1(q) = -2q + 3(1 - q)$ , если первый игрок выбирает свою первую стратегию, и  $\mu_2(q) = 2q - 4(1 - q)$ , если первый игрок выбирает свою вторую стратегию. Значение  $q^*$  определяется из условия  $\mu_1(q) = \mu_2(q)$ , оно равно  $q^* = 7/11$ . Итак, оптимальная смешанная стратегия второго игрока равна  $\mathbf{q}^* = (7/11, 4/11, 0, 0)$ .  $\square$

Мы рассмотрели два примера матричных игр, в которых у первого игрока ровно две стратегии (а у второго игрока произвольное количество стратегий: две или более) — такие игры можно решить графическим способом. Сформулируем теперь теорему, дающую способ решения матричных игр, в которых и у первого, и у второго игрока произвольное количество стратегий. Оказывается, что в общем случае любая матричная игра с произвольным числом стратегий у игроков может быть сведена к паре взаимно двойственных задач линейного программирования, и эти задачи имеют оптимальные решения.

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР.** В любой матричной игре у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.

**Доказательство.** Пусть рассматривается игра с платежной матрицей  $\mathbf{A}$  (10.1.1), все элементы которой строго положительны;  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — смешанные стратегии первого и второго игрока.

Математическое ожидание выигрыша первого игрока

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

Пусть первый игрок выбирает такую стратегию  $\mathbf{p}$ , чтобы математическое ожидание его выигрыша независимо от того, какую стратегию выберет второй игрок, было не меньше некоторой гарантированной величины  $r$  (нижняя цена игры  $\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} > 0$ , поскольку все платежи  $a_{ij} > 0$ , а  $r$ , очевидно, не меньше  $\alpha$ , поэтому  $r > 0$ ):

[illegible]

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$
$$x_i = p_i / r, \quad i = 1, 2, \dots, m$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \quad (10.1.3)$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{r} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{r} = \frac{1}{r}.$$

Цель первого игрока — максимизировать свой гарантированный выигрыш  $r$  или, что то же самое, минимизировать величину

$$\sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования для первого игрока:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i &\geq 1, \quad j=1, 2, \dots, n, \\ x_i &\geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Аналогичные рассуждения с позиции второго игрока приводят к задаче линейного программирования, двойственной к задаче для первого игрока:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n y_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j &\leq 1, \quad i=1, 2, \dots, m, \\ y_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Поскольку все  $a_{ij} \geq 0$ , можно подобрать такие достаточно большие положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , чтобы для всех  $j=1, 2, \dots, n$  выполнялись неравенства  $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq 1$  (например,  $x_1 = 1 / \min\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\}$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_m = 0$ ), значит, задача (10.1.4) имеет допустимое решение. Допустимым решением задачи (10.1.5) является, очевидно, нулевой вектор.

Так как каждая из пары двойственных задач (10.1.4)—(10.1.5) имеет допустимое решение, то (согласно теории двойственных задач линейного программирования) обе эти задачи имеют некоторые оптимальные решения  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  и  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ ; при этом оптимальные значения целевых функций данных задач равны:

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{j=1}^n y_j^*,$$

Покажем, что цена игры

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n y_j^*},$$

а оптимальные смешанные стратегии игроков равны соответственно

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{v}\mathbf{x}^* = \frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^*} (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) = \left( \frac{x_1^*}{\sum_{k=1}^m x_k^*}, \frac{x_2^*}{\sum_{k=1}^m x_k^*}, \dots, \frac{x_m^*}{\sum_{k=1}^m x_k^*} \right)$$

и

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{v}\mathbf{y}^* = \frac{1}{\sum_{l=1}^n y_l^*} (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) = \left( \frac{y_1^*}{\sum_{l=1}^n y_l^*}, \frac{y_2^*}{\sum_{l=1}^n y_l^*}, \dots, \frac{y_n^*}{\sum_{l=1}^n y_l^*} \right).$$

Действительно, пусть  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — произвольные смешанные стратегии игроков, тогда

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \frac{y_j^*}{\sum_{l=1}^n y_l^*} = \frac{1}{\sum_{l=1}^n y_l^*} \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq \frac{1}{\sum_{l=1}^n y_l^*} \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{\sum_{l=1}^n y_l^*} = \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_i^*}{\sum_{k=1}^m x_k^*} q_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^*} \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^*} \sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^*} = \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

$$\begin{aligned} M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &= . \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_i^*}{\sum_{k=1}^m x_k^*} \frac{y_j^*}{\sum_{l=1}^n y_l^*} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m x_k^* \sum_{l=1}^n y_l^*} \sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* = \mathbf{v}^2 \sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

Из (10.1.6) следует, что  $M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq \mathbf{v}$ , из (10.1.7) следует, что  $M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq \mathbf{v}$ , а из (10.1.8) следует, что одновременно

$$M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq \mathbf{v} \left( \text{так как } M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{v}^2 \sum_{j=1}^n y_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq \mathbf{v}^2 \sum_{j=1}^n y_j^* = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \right)$$

и

$$M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq \mathbf{v} \left( \text{так как } M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{v}^2 \sum_{i=1}^m x_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq \mathbf{v}^2 \sum_{i=1}^m x_i^* = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \right),$$

значит,  $M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{v}$ .

Итак,  $M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq \mathbf{v}$ ,  $M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq \mathbf{v}$ ,  $M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{v}$ , поэтому

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}),$$

Таким образом, пара  $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  образует седловую точку данной игры в смешанных стратегиях, и  $M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = v$  — цена данной игры.

Если же в платежной матрице  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  есть отрицательные элементы или нули, то можно добавить ко всем элементам матрицы одно и то же достаточно большое положительное число  $b$ , так чтобы все элементы матрицы  $\mathbf{A}' = (a_{ij} + b)$  были положительными.

Обозначим  $M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$  математическое ожидание выигрыша первого игрока в игре с платежной матрицей  $\mathbf{A}$ , а  $M'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a'_{ij} p_i q_j$  — математическое ожидание выигрыша первого игрока в игре с платежной матрицей  $\mathbf{A}'$ .

При этом

$$\begin{aligned} M'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a'_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b) p_i q_j = M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n q_j = \\ &= M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b, \end{aligned}$$

игра с платежной матрицей  $\mathbf{A}'$  имеет седловую точку  $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  в смешанных стратегиях:

$$M'(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq M'(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq M'(\mathbf{p}^*, \mathbf{q})$$

или

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) + b \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) + b \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) + b,$$

откуда

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}),$$

т. е. игра с платежной матрицей  $\mathbf{A}$  также имеет седловую точку  $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  в смешанных стратегиях, а цена игры с матрицей  $\mathbf{A}$  равна

$$v = M(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = M'(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) - b. \quad \square$$

**ПРИМЕР 10.1.5.** Требуется найти оптимальные смешанные стратегии в игре из примера 10.1.4, сведя эту игру к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

**Решение.** От платежной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

путем добавления положительного числа  $b = 5$  перейдем к матрице

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

все элементы которой положительны.

Сведем данную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования (согласно теореме 10.1.2):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 1, \\ 8x_1 + x_2 \geq 1, \\ 9x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} & \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 4y_4 \leq 1, \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

Поскольку оптимальные решения этих задач равны  $\mathbf{x}^* = (6/53, 5/53)$  и  $\mathbf{y}^* = (7/53, 4/53, 0, 0)$  [в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно], оптимальные смешанные стратегии игроков

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{6/53 + 5/53} (6/53, 5/53) = (6/11, 5/11)$$

и

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{7/53 + 4/53 + 0 + 0} (7/53, 4/53, 0, 0) = (7/11, 4/11, 0, 0),$$

а цена игры

$$v = \frac{1}{6/53 + 5/53} - 5 = -2/11. \quad \square$$

## § 10.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ситуация является *полностью неопределенной*, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Если будет принято  $i$ -е решение, а состояние внешней среды соответствует  $j$ -й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход  $q_{ij}$ . Матрица

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

называется *матрицей последствий* (от реализации возможных решений).

В ситуации с *полной неопределенностью* могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера относительно того, какое решение нужно принять. Эти рекомендации не обязательно бу-

дуг приняты. Многое будет зависеть, например, от склонности к риску лица, принимающего решение. Но как о ц е н и т ь риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет  $i$ -е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы знали, что осуществляется  $j$ -е состояние внешней среды, то выбрали бы наилучшее решение, т. е. приносящее наибольший доход

$$q_j = \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj}.$$

Значит, принимая  $i$ -е решение, мы рискуем получить не  $q_j$ , а только  $q_{ij}$ , т. е. если мы примем  $i$ -е решение, а во внешней среде реализуется  $j$ -е состояние, то мы будем с о ж а л е т ь о недополученном доходе в размере

$$r_{ij} = q_j - q_{ij} = \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} - q_{ij} \quad (10.2.1)$$

(по сравнению с тем, как если бы мы знали точно, что реализуется  $j$ -е состояние внешней среды, и выбрали бы решение, приносящее наибольший доход  $q_j = \max_{i=1,2,\dots,m} q_{ij}$ ). Матрица

$$\mathbf{R} = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

где сожаления  $r_{ij}$  рассчитаны по формуле (10.2.1), называется *матрицей сожалений* (или *матрицей рисков*).

Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Н е о п р е д е л е н н о с т ь — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные е д и н и ч н ы е случайные явления связаны с неопределенностью, а м а с с о в ы е случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации. Существуют следующие п р а в и л а — рекомендации по принятию решений в таких ситуациях.

**Правило Вальда (правило крайнего пессимизма).** Рассматривая  $i$ -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация, наихудшая с нашей точки зрения (т. е. приносящая наименьший доход  $a_i = \min_{j=1,2,\dots,n} q_{ij}$ ) и выберем решение  $i_0$  с наибольшим  $a_i$ . Итак, *правило Вальда рекомендует принять такое решение  $i_0$ , что*

$$a_{i_0} = \max_{i=1,2,\dots,m} a_i = \max_{i=1,2,\dots,m} \left( \min_{j=1,2,\dots,n} q_{ij} \right).$$

**Правило Сэвиджа (правило минимальных сожалений).** При применении этого правила анализируется матрица сожалений  $\mathbf{R}$ . Рассматривая  $i$ -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация макси-

мальных сожалений  $b_i = \max_{j=1,2,\dots,n} r_{ij}$ , и выберем решение  $i_0$  с наименьшим  $b_i$ .

Итак, *правило Сэвиджа рекомендует принять такое решение  $i_0$ , что*

$$b_{i_0} = \min_{i=1,2,\dots,m} b_i = \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \max_{j=1,2,\dots,n} r_{ij} \right).$$

**ПРАВИЛО ГУРВИЦА** взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации. По правилу Гурвица, *принимается решение  $i_0$ , на котором достигается максимум выражения*

$$\lambda \min_{j=1,2,\dots,n} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=1,2,\dots,n} q_{ij},$$

где  $\lambda \in [0; 1]$ . Значение  $\lambda$  выбирается из субъективных соображений. Если  $\lambda$  приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении  $\lambda$  к нулю правило Гурвица приближается к правилу розового оптимизма.

**ПРИМЕР 10.2.1.** Сидя в отправляющемся на курорт поезде, перед самым отправлением Петя вдруг вспомнил, что, *кажется*, забыл выключить дома утюг. Можно еще успеть сойти с поезда и исправить ошибку, но тогда пропадет путевка (100 000 руб.). Если же уехать, утюг, если он действительно включен, может стать причиной пожара, и тогда придется ремонтировать квартиру (1 500 000 руб.). Петя не уверен, включен утюг или выключен. Составить матрицу последствий и матрицу сожалений. Определить решения, рекомендуемые критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

**Решение.** У Пети есть две стратегии: поехать отдыхать или вернуться домой. У внешней среды также есть два состояния: утюг выключен либо утюг включен.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1\,500\,000 \\ -100\,000 & -100\,000 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен

$$q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0,$$

по второму —

$$q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = -100\,000,$$

поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1\,400\,000 \\ 100\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальные элементы строк матрицы последствий  $a_1 = -1\,500\,000$ ,  $a_2 = -100\,000$ . Теперь из двух чисел  $(-1\,500\,000)$ ,  $(-100\,000)$  находим наибольшее. Это  $(-100\,000)$ . Значит, правило Вальда рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Максимальные элементы строк матрицы сожалений  $b_1 = 1\,400\,000$ ,  $b_2 = 100\,000$ . Из чисел  $1\,400\,000$ ,  $100\,000$  находим наименьшее. Это  $100\,000$ . Значит, правило Сэвиджа, как и правило Вальда, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.

Читатель может убедиться, что правило Гурвица при  $\lambda = 0,5$  тоже, как правила Вальда и Сэвиджа, рекомендует принять второе решение, т. е. вернуться домой.  $\square$

Предположим, что в рассмотренной схеме известны вероятности  $p_j$  того, что реальная ситуация развивается по варианту  $j$ . Именно такое положение называется **частичной неопределенностью**. При принятии решений в таких ситуациях можно выбрать одно из следующих правил.

**Правило максимизации ожидаемого дохода.** Доход, получаемый при принятии  $i$ -го решения, является случайной величиной  $Q_i$  с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} Q_i & q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

*Ожидаемый доход при принятии  $i$ -го решения оценивается математическим ожиданием  $\mathbf{M}Q_i$  соответствующей случайной величины  $Q_i$ . Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход*

$$\mathbf{M}Q_{i_0} = \max_{i=1, 2, \dots, m} \mathbf{M}Q_i = \max_{i=1, 2, \dots, m} \left( \sum_{j=1}^n q_{ij} p_j \right).$$

**Правило минимизации ожидаемых сожалений.** Сожаления при реализации  $i$ -го решения представляются случайной величиной  $R_i$  с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} R_i & r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

*Ожидаемые сожаления оцениваются математическим ожиданием  $\mathbf{M}R_i$  соответствующей случайной величины  $R_i$ . Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления*

$$\mathbf{M}R_{i_0} = \min_{i=1, 2, \dots, m} \mathbf{M}R_i = \min_{i=1, 2, \dots, m} \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j \right).$$

**ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРАВИЛ МАКСИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА И МИНИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМЫХ СОЖАЛЕНИЙ.** Решения, рекомендуемые правилами максимизации ожидаемого дохода и минимизации ожидаемых сожалений, всегда совпадают.

**Доказательство.** Имеем:

$$\begin{aligned}\min_{i=1,2,\dots,m} \mathbf{MR}_i &= \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j \right) = \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \sum_{j=1}^n \left( \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} - q_{ij} \right) p_j \right) = \\ &= \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \sum_{j=1}^n p_j \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} - \sum_{j=1}^n q_{ij} p_j \right) = \\ &= \min_{i=1,2,\dots,m} \left( \sum_{j=1}^n p_j \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} \right) - \max_{i=1,2,\dots,m} \left( \sum_{j=1}^n q_{ij} p_j \right) = \sum_{j=1}^n p_j \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj} - \max_{i=1,2,\dots,m} \mathbf{MQ}_i,\end{aligned}$$

так как  $\sum_{j=1}^n p_j \max_{k=1,2,\dots,m} q_{kj}$  не зависит от  $i$ . Поэтому  $\max_{i=1,2,\dots,m} \mathbf{MQ}_i$  достигается на том же решении, что и  $\min_{i=1,2,\dots,m} \mathbf{MR}_i$ .  $\square$

**ПРИМЕР 10.2.2.** Владелец груза должен выбрать одну из двух альтернатив: страховать груз или не страховать. Риск заключается в том, что с вероятностью 0,1 возможна катастрофа, в результате которой груз будет утрачен. Если груз застрахован, то в случае его утраты владелец получает компенсацию его стоимости (100 000 руб.). Стоимость страхового полиса 5000 руб. Требуется определить, стоит ли страховать груз?

**Решение.** У владельца груза есть две стратегии: страховать груз или не страховать его. У внешней среды также есть два состояния: катастрофа произойдет либо не произойдет.

Матрица последствий имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -5000 & -5000 \\ -100\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вероятности состояний внешней среды известны ( $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,9$ ), поэтому ряды распределения дохода при выборе первой и второй стратегии таковы:

$$\begin{array}{c|cc} Q_1 & 0 & -5000 \\ \hline p & 0,1 & 0,9 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} Q_2 & -95\,000 & 0 \\ \hline p & 0,1 & 0,9 \end{array}.$$

При этом

$$\mathbf{MQ}_1 = -5000 \cdot 0,1 + (-5000) \cdot 0,9 = -5000,$$

аналогично

$$\mathbf{MQ}_2 = -10\,000.$$

Таким образом, правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять первое решение, т. е. застраховать груз.

Составим матрицу сожалений. Максимум по первому столбцу равен  $q_1 = \max_{i=1,2} q_{i1} = 0$ , по второму —  $q_2 = \max_{i=1,2} q_{i2} = 0$ , поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 5000 \\ 95\,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ожидаемые сожаления при указанных выше вероятностях. Получаем  $\mathbf{MR}_1 = 4500$ ,  $\mathbf{MR}_2 = 9500$ . Минимальные ожидаемые сожаления равны 4500, они соответствуют первому решению — застраховать груз.  $\square$

**ПРИМЕР 10.2.3.** Исследуем ситуацию принятия решений в условиях неопределенности в случае, когда матрица последствий

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Составим матрицу сожалений. Имеем:

$$q_1 = \max_{k=1,2,\dots,m} q_{k1} = 8, \quad q_2 = 5, \quad q_3 = 8, \quad q_4 = 12,$$

поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии  $i$ -го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т. е. приносящая наименьший доход  $a_i = \min_j q_{ij}$ , и выберем решение  $i_0$  с наибольшим  $a_i$ . Имеем:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 1.$$

Из этих чисел: 2, 2, 3, 1 находим максимальное: это 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая  $i$ -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных сожалений  $b_i = \max_j r_{ij}$ , и выберем решение  $i_0$  с наименьшим  $b_i$ . Имеем:

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 7.$$

Из этих чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное: это 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять третье решение.

Если известны вероятности состояний внешней среды:

$$1/2, \quad 1/6, \quad 1/6, \quad 1/6,$$

то правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$MQ_1 = 23/6, \quad MQ_2 = 25/6, \quad MQ_3 = 7 \quad MQ_4 = 17/6.$$

Максимальный ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$MR_1 = 20/6, \quad MR_2 = 4, \quad MR_3 = 7/6, \quad MR_4 = 32/5,$$

т. е. опять третье решение.  $\square$

В заключение следует отметить, что решения, предлагаемые различными правилами, не всегда совпадают. Лицу, принимающему решение, следует понимать, что оно будет нести ответственность за последствия. Поэтому к правилам следует относиться не как к рецептам действий, а как к средствам, позволяющим задуматься о последствиях принятия решений и проанализировать возможные варианты.

### § 10.3. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Не все конфликтные ситуации можно представить как игры с нулевой суммой, потому что интересы участников таких конфликтов не всегда противоположны. Обобщением игр с нулевой суммой на случай **н е п р о т и в о п о л о ж н ы х** интересов участников являются **игры с ненулевой суммой**.

Рассмотрим **к о н е ч н у ю** игру с ненулевой суммой, т. е. такую, в которой множества стратегий игроков конечны: будем считать, что первый игрок может выбрать одну из  $m$  своих стратегий, обозначенных номерами  $i = 1, 2, \dots, m$ , а второй игрок — одну из  $n$  своих стратегий, обозначенных номерами  $j = 1, 2, \dots, n$ . Если первый игрок выбрал свою  $i$ -ю стратегию, а второй игрок — свою  $j$ -ю стратегию, то в результате такого совместного выбора первый игрок получает выигрыш  $a_{ij}$ , а второй игрок — выигрыш  $b_{ij}$ . При этом совершенно не обязательно, чтобы  $b_{ij} = -a_{ij}$ , как в матричных играх.

Таким образом, конечная игра с ненулевой суммой полностью определяется двумя матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

поэтому называется *биматричной*.

Биматричная игра, как и матричная, происходит партиями. Цель каждого игрока — выиграть как можно большую сумму в результате большого числа партий. Понятия чистых и смешанных стратегий игроков в биматричных играх вводятся аналогично тому, как это было сделано в матричных играх.

Если матричные игры являются играми со строгим соперничеством, поскольку выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, то в биматричных играх интересы игроков могут быть в большей или меньшей степени близки.

В зависимости от того, запрещено или разрешено сотрудничество игроков, различают некооперативные и кооперативные игры.

Анализ биматричной игры в некооперативном варианте сводится к поиску *максиминных стратегий* игроков, т. е. стратегий, которые обеспечивают игрокам получение максимально возможного гарантированного выигрыша вне зависимости от действий противника.

Множество всевозможных пар смешанных стратегий игроков обозначим

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{p} \in \mathcal{S}_1, \mathbf{q} \in \mathcal{S}_2\},$$

где

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \mid p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n q_j = 1 \right\}.$$

Если два игрока выбрали смешанные стратегии  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны

$$M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j \quad \text{и} \quad M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} p_i q_j.$$

Важным в теории игр является понятие равновесия. Говорят, что стратегии игроков  $\mathbf{p}^*$  и  $\mathbf{q}^*$  образуют *равновесие Нэша*, если никому из игроков не выгодно от них отклоняться при условии, что другой игрок не следует своей равновесной стратегии, т. е. если для любых стратегий  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$

$$M_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*),$$

$$M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}).$$

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЙ.** В любой биматричной игре существует хотя бы одно равновесие Нэша.

**Доказательство.** Доказательство следует непосредственно из теоремы о неподвижной точке. Читателям, не знакомым с этой теоремой, рекомендуем провести доказательство самостоятельно для случая, когда каждый из игроков имеет ровно две чистые стратегии.  $\square$ .

**КРИТЕРИЙ РАВНОВЕСИЯ.** Стратегии игроков  $\mathbf{p}^*$  и  $\mathbf{q}^*$  образуют равновесие Нэша тогда и только тогда, когда при условии использования первым игроком стратегии  $\mathbf{p}^*$  любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая  $q_j^* > 0$ , приносит второму игроку один и тот же выигрыш  $\mu$ , а любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая  $q_j^* = 0$ , приносит второму игроку выигрыш, не больший  $\mu$ , а при условии использования вторым игроком стратегии  $\mathbf{q}^*$  любая чистая стратегия первого игрока, соответствующая  $p_i^* > 0$ , приносит второму игроку один и тот же выигрыш  $\nu$ , а любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая  $p_i^* = 0$ , приносит второму игроку выигрыш, не больший  $\nu$ .

**Доказательство.** Пусть пара стратегий первого и второго игрока

$$\mathbf{p}^* = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad \mathbf{q}^* = (q_1, q_2, \dots, q_{j_1}, \dots, q_{j_2}, \dots, q_n)$$

образуют равновесие Нэша, и пусть первый игрок действует в соответствии со стратегией  $\mathbf{p}^*$ , не отклоняясь от нее.

Предположим, что у второго игрока существуют такие чистые стратегии с номерами  $j_1$  и  $j_2$ , что  $q_{j_1} > 0$  и

$$M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{(1)}) = \sum_{i=1}^m b_{ij_1} p_i < \sum_{i=1}^m b_{ij_2} p_i = M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{(2)})$$

где

$$\mathbf{q}^{(1)} = (0, 0, \dots, q_{j_1}, \dots, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = (0, 0, \dots, 0, \dots, q_{j_2}, \dots, 0),$$

В этом случае второй игрок может отклониться от стратегии  $\mathbf{q}^*$  и выбрать стратегию

$$\mathbf{q}^{**} = (q_1, q_2, \dots, 0, \dots, q_{j_1} + q_{j_2}, \dots, q_n),$$

которая обеспечит ему больший выигрыш, чем стратегия  $\mathbf{q}^*$  при условии, что первый игрок не будет отклоняться от стратегии  $\mathbf{p}^*$ . Действительно,

$$\begin{aligned} M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{**}) - M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) &= \\ &= \sum_{i=1}^m (b_{i1}p_iq_1 + b_{i2}p_iq_2 + \dots + b_{ij_1}p_i \cdot 0 + \dots + b_{ij_2}p_i(q_{j_1} + q_{j_2}) + \dots + b_{in}p_iq_n) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (b_{i1}p_iq_1 + b_{i2}p_iq_2 + \dots + b_{ij_1}p_iq_{j_1} + \dots + b_{ij_2}p_iq_{j_2} + \dots + b_{in}p_iq_n) = \\ &= -q_{j_1} \sum_{i=1}^m b_{ij_1}p_i + q_{j_2} \sum_{i=1}^m b_{ij_2}p_i = q_{j_2} (M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{(2)}) - M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{(1)})) > 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие с предположением, что стратегии  $\mathbf{p}^*$  и  $\mathbf{q}^*$  образуют равновесие Нэша, которое доказывает теорему.  $\square$ .

*Максиминные смешанные стратегии* первого и второго игроков обеспечивают им г а р а н т и р о в а н н ы е в ы и г р ы ш и

$$\alpha = \max_{\mathbf{p} \in S_1} \min_{\mathbf{q} \in S_2} M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{и} \quad \beta = \max_{\mathbf{q} \in S_2} \min_{\mathbf{p} \in S_1} M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

соответственно вне зависимости от поведения противника.

По другому максиминные стратегии называются *осторожными* — смысл этого названия очевиден, и в некооперативном случае игрокам имеет смысл придерживаться своих осторожных стратегий.

**ПРИМЕР 10.3.1 (ИГРА «ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННЫХ»).** Двое преступников (первый и второй игроки), подозреваемые в совместном совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Прямые улики у следствия отсутствуют, поэтому успех обвинения зависит от того, признаются ли заключенные. У каждого из заключенных есть две стратегии: признаться (первая стратегия) или не признаваться (вторая стратегия). Если оба преступника признаются, то они будут признаны виновными и приговорены к восьми годам заключения. Если ни один из них не признается, то по обвинению в основном преступлении они будут оправданы, но суд все-таки признает их вину в менее значительном преступлении (например, в ношении оружия), в результате чего оба будут приговорены к одному году заключения. Если же признается только один из них, то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а другой преступник будет приговорен к максимальному сроку заключения — к десяти годам. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

**Решение.** Матрицы выигрышей игроков таковы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков представим в виде  $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$  и  $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$ , где  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [0, 1]$ . При этом математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -8pq - 10(1 - p)q - (1 - p)(1 - q) = (p - 9)q + p - 1.$$

Аналогично определяется математическое ожидание выигрыша второго игрока:

$$M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -8pq - 10p(1 - q) - (1 - p)(1 - q) = (q - 9)p + q - 1.$$

Наилучший гарантированный выигрыш первого игрока равен

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_{p \in [0, 1]} \min_{q \in [0, 1]} M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{p \in [0, 1]} \min_{q \in [0, 1]} ((p - 9)q + p - 1) = \\ &= \max_{p \in [0, 1]} ((p - 9) \cdot 1 + p - 1) = \max_{p \in [0, 1]} (2p - 10) = -8 \end{aligned}$$

[здесь мы учли, что  $p - 9 < 0$ , так как  $p \in [0, 1]$ , поэтому вне зависимости от  $p$   $\min_{q \in [0, 1]} ((p - 9)q + p - 1)$  будет достигаться при  $q = 1$ ], а максиминная стратегия первого игрока, соответствующая этому наилучшему гарантированному выигрышу,  $\mathbf{p} = (1, 0)$ , т. е. максиминная стратегия первого игрока — признаться и получить восемь лет заключения. Аналогично находим наилучший гарантированный выигрыш второго игрока

$$\begin{aligned} \beta &= \max_{q \in [0, 1]} \min_{p \in [0, 1]} M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{q \in [0, 1]} \min_{p \in [0, 1]} ((q - 9)p + q - 1) = \\ &= \max_{q \in [0, 1]} ((q - 9) \cdot 1 + q - 1) = \max_{q \in [0, 1]} (2q - 10) = -8 \end{aligned}$$

и его максиминную стратегию  $\mathbf{q} = (1, 0)$  — признаться. Очевидно, максиминные стратегии образуют равновесие Нэша. Предлагаем читателю убедиться, что других равновесий Нэша в данной игре нет.  $\square$

**ПРИМЕР 10.3.2 (Игра «СЕМЕЙНЫЙ СПОР»).** Два игрока (муж и жена) выбирают, где провести вечер. У каждого из них есть две стратегии: выбрать посещение футбольного матча (первая стратегия) или оперного спектакля (вторая стратегия). Полезность совместного похода в театр муж оценивает в одну единицу, а жена в две, полезность совместного похода на футбол, наоборот, жена оценивает в одну единицу, а муж в две. Если же супруги идут в разные места, вечер оказывается испорченным, что соответствует нулевым полезностям для обоих игроков. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

**Решение.** Составим матрицы выигрышей игроков:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\mathbf{p} = (p, 1-p)$  и  $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ , где  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [0, 1]$  — смешанные стратегии игроков. При этом математические ожидания выигрышей игроков равны

$$M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2pq + (1-p)(1-q) = (3p-1)q - p + 1,$$

$$M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = pq + 2(1-p)(1-q) = (3q-2)p - 2q + 2,$$

наилучшие гарантированные выигрыши игроков

$$\alpha = \max_{p \in [0, 1]} \min_{q \in [0, 1]} ((3p-1)q - p + 1) = \max \left\{ \max_{p \in [0, 1/3]} (2p), \max_{p \in [1/3, 1]} (1-p) \right\} = \frac{2}{3},$$

$$\beta = \max_{q \in [0, 1]} \min_{p \in [0, 1]} ((3q-2)p - 2q + 2) = \max \left\{ \max_{q \in [0, 2/3]} q, \max_{q \in [2/3, 1]} (2-2q) \right\} = \frac{2}{3},$$

а соответствующие максиминные стратегии таковы:  $\mathbf{p} = (1/3, 2/3)$  и  $\mathbf{q} = (2/3, 1/3)$ . Это означает, что муж должен в  $1/3$  вечеров выбирать футбол и в  $2/3$  вечеров театр, а жена должна в  $2/3$  вечеров выбирать футбол и в  $1/3$  вечеров театр, тогда в среднем и муж, и жена будут выигрывать по  $2/3$  за одну партию. Равновесий Нэша в данной игре целых три:

$$(\mathbf{p}^* = (1, 0), \mathbf{q}^* = (1, 0)), (\mathbf{p}^{**} = (0, 1), \mathbf{q}^{**} = (0, 1)), \\ (\mathbf{p}^{***} = (1/3, 2/3), \mathbf{q}^{***} = (2/3, 1/3)).$$

Предлагаем читателю убедиться, что других равновесий Нэша в данной игре нет.  $\square$

В отличие от матричных игр, в биматричных играх может оказаться так, что совместное отклонение двумя игроками от равновесий Нэша (или от максиминных стратегий) приводит к увеличению выигрыша обоих игроков. Это иллюстрируется следующими примерами.

Если в примере 10.3.1 один из игроков будет придерживаться максиминной стратегии и признается, а другой игрок отклонится от своей максиминной стратегии и признаваться не будет, то тот, кто не признается, получит десять лет заключения вместо восьми (в результате его положение ухудшится, а положение его соучастника улучшится).

Существенным отличием биматричных игр от матричных являются то, что возможны ситуации, когда отклонение обоих игроков от максиминных стратегий приводит к увеличению их выигрышей: если в примере 10.3.1 оба преступника не признаются, то оба получают всего по одному году. Это и является основой дилеммы, которая стоит перед каждым из заключенных: поскольку переговоры друг с другом невозможны, каждый из двух заключенных делает выбор, признаваться или нет, не зная, сознался ли его соучастник.

В примере 10.3.2 ситуация еще сложнее: участники могут увеличить свои выигрыши, совместно отклонившись от максиминных стратегий, в нескольких ситуациях. Например, если вместо максиминных стратегий  $\mathbf{p} = (1/3, 2/3)$  и  $\mathbf{q} = (2/3, 1/3)$  игроки выберут соответственно стратегии  $\mathbf{p} = (1, 0)$  и  $\mathbf{q} = (1, 0)$ , то их выигрыши составят 2 для мужа и 1 для жены (оба эти выигрыша больше  $2/3$ ). Но есть и другая ситуация: если вместо максиминных стратегий игроки выберут стратегии  $\mathbf{p} = (0, 1)$  и  $\mathbf{q} = (0, 1)$ , то их выигрыши составят 1 для мужа и 2 для жены (что опять превышает максиминные выигрыши). Если переговоры между участниками невозможны, отклоняться от максиминных стратегий опасно, так как даже если есть возможность выиграть больше, эта возможность сопряжена с риском уменьшения выигрыша [если муж выберет театр:  $\mathbf{p} = (0, 1)$ , а жена футбол:  $\mathbf{q} = (1, 0)$ , или наоборот, то выигрыши обоих игроков будут равны нулю].

Выходом в таких ситуациях является *кооперация* игроков, т. е. сотрудничество, состоящее в том, что игроки могут договориться о совместном выборе стратегий. Перейдем к обсуждению возможностей кооперативного поведения игроков.

Ранее предполагалось, что в процессе игры отсутствует явный обмен информацией между участниками. Каждый игрок определял свою линию поведения, исходя из своей функции выигрыша, и, безусловно, основываясь на том, что другие игроки действуют аналогично. При этом считалось, что игроки знают функции выигрыша друг друга, но в непосредственный контакт не вступают.

Между тем в реальных экономических ситуациях участники конфликтов активно взаимодействуют друг с другом: вступают в переговоры, заключают соглашения, создают коалиции, применяют угрозы и подкупы и т. д. Все эти процессы могут в различной степени получать отражения в игровых моделях.

Игры, в которых возможны непосредственные контакты между участниками, называются *кооперативными*. В этой главе изучается вопрос: если игроки могут вступать в переговоры и образовывать коалиции, то какие исходы могут стать результатом переговоров.

Обсудим подходы к анализу биматричных игр в кооперативном варианте.

Рассмотрим биматричную игру, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы матрицами  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Пусть  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — смешанные стратегии игроков. Так как

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1, q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

множество всех возможных вариантов пар выигрышей

$$(M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} p_i q_j \right)$$

представляет собой выпуклую оболочку точек плоскости с координатами  $(a_{ij}, b_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ; эти точки  $(a_{ij}, b_{ij})$  соответствуют парам выигрышей игроков в случае выбора ими своих чистых стратегий.

При этом точка  $(M'_1, M'_2)$  доминирует точку  $(M''_1, M''_2)$  если

$$\begin{cases} M'_1 > M''_1, \\ M'_2 \geq M''_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} M'_1 \geq M''_1, \\ M'_2 > M''_2, \end{cases}$$

это означает, что при переходе от первой точки ко второй выигрыш каждого из игроков не уменьшится, и при этом хотя бы у одного из игроков выигрыш увеличится.

Множество точек, *оптимальных по Парето* (т. е. не доминируемых другими), описывается так:

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \mid \mathbf{p}^* \in S_1, \mathbf{q}^* \in S_2, \forall \mathbf{p} \in S_1 \ M_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*), \forall \mathbf{q} \in S_2 \ M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)\}.$$

Если выбрать из множества точек, оптимальных по Парето, те точки, в которых выигрыши первого и второго игроков окажутся не меньше их максимальных выигрышей  $\alpha$  и  $\beta$ , то получится *переговорное множество*

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \mathcal{T} \mid M_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq \alpha, \ M_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq \beta\}.$$

Игрокам, естественно, имеет смысл выбирать свои оптимальные стратегии, соответствующие точкам из переговорного множества.

Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества. Самый простой из них заключается в выборе таких чистых стратегий, которые приносят игрокам наибольший суммарный доход, из которого один из игроков платит другому оговоренную сумму. Этот способ, конечно же, предполагает полностью доверительные отношения между игроками.

Если же договориться о выборе точки из переговорного множества игрокам не удастся, то можно предложить им применить одну из так называемых *арбитражных схем*. Например, **арбитражная схема Нэша** предлагает игрокам выбрать из переговорного множества *решение Нэша* — такую пару смешанных стратегий, которая доставляет максимум *функции Нэша*, которая равна произведению превышений выигрышей игроков над гарантированными (минимаксными) выигрышами.

Реализация алгоритма Нэша предполагает решение задачи математического программирования

$$N = (M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \alpha)(M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \beta) \rightarrow \max, \quad (10.3.1)$$

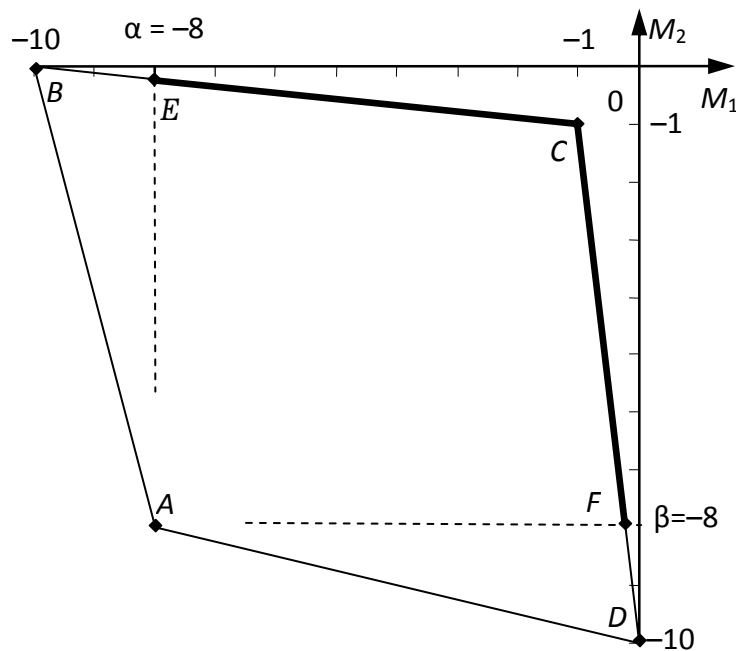
$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{V}.$$

Целевая функция этой задачи называется *функцией Нэша*, а оптимальное решение задачи (10.3.1) — *решением Нэша*.

Решение задачи (10.3.1) всегда существует, и если в переговорном множестве  $V$  есть хотя бы одна точка  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{V}$ , такая что  $M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > \alpha$ ,  $M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > \beta$ , то решение задачи (10.3.1) единственно.

**ПРИМЕР 10.3.3 (ИГРА «ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННЫХ» В КООПЕРАТИВНОМ ВАРИАНТЕ).** Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 10.3.1 при условии, что заключенные могут обмениваться информацией.

**Решение.** Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником  $ABCD$  на рис. 10.3.1.



**Рис. 10.3.1.** Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»

Очевидно, множество Парето соответствует ломаной  $BCD$ , а переговорное множество — ломаной  $ECF$ .

Прямая, проходящая через точки  $B(-10, 0)$  и  $C(-1, -1)$ , задается уравнением  $M_2 = (-M_1 - 10)/9$ , а прямая, проходящая через точки  $C(-1, -1)$  и  $D(0, -10)$ , — уравнением  $M_2 = -9M_1 - 10$ , поэтому функция Нэша

$$\begin{aligned}
N(M_1, M_2) &= (M_1 + 8)(M_2 + 8) = \\
&= \begin{cases} (M_1 + 8)\left(8 - \frac{M_1 + 10}{9}\right), & M_1 \in [-8, -1], \\ (M_1 + 8)(8 - 9M_1 - 10), & M_1 \in [-1, -2/9] \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{-M_1^2 + 54M_1 + 496}{9}, & M_1 \in [-8, -1], \\ -9M_1^2 - 74M_1 - 16, & M_1 \in [-1, -2/9]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Функцию Нэша мы рассматриваем на переговорном множестве, т. е. на ломаной  $ECF$ , при этом отрезок  $EC$  задается уравнением  $M_2 = (-M_1 - 10)/9$  при  $M_1 \in [-8, -1]$ , а отрезок  $CF$  задается уравнением  $M_2 = -9M_1 - 10$  при  $M_2 = -9M_1 - 10 \in [-8, -1]$  (или, что эквивалентно, при  $M_1 \in [-1, -2/9]$ ).

Максимум функции Нэша на переговорном множестве достигается в точке  $M_1^* = -1$  (график функции Нэша представлен на рис. 10.3.2).

При этом  $M_2^* = -9M_1^* - 10 = -1$ .

На рис. 10.3.1 решение Нэша соответствует точке  $C$ , поэтому если заключенные имеют возможность переговариваться, то они могут договориться оба не признаваться, и тогда получают всего по одному году заключения.  $\square$

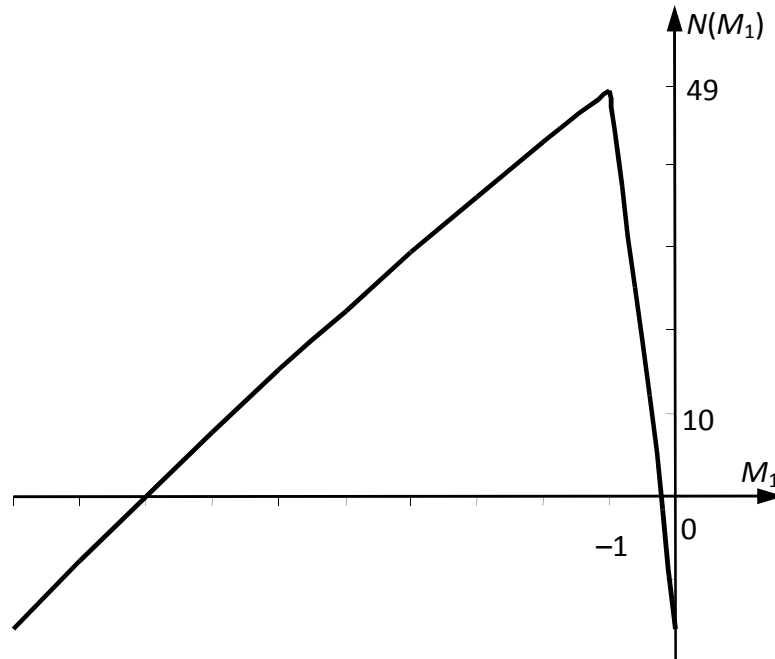


Рис. 10.3.2. График функции Нэша в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»

**ПРИМЕР 10.3.4 (ИГРА «СЕМЕЙНЫЙ СПОР» в КООПЕРАТИВНОМ ВАРИАНТЕ).** Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 10.3.2 при условии, что игроки могут обмениваться информацией.

**Решение.** Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено треугольником  $OAB$  на рис. 10.3.3. Очевидно, и множество Парето, и переговорное множество соответствуют отрезку  $AB$ .

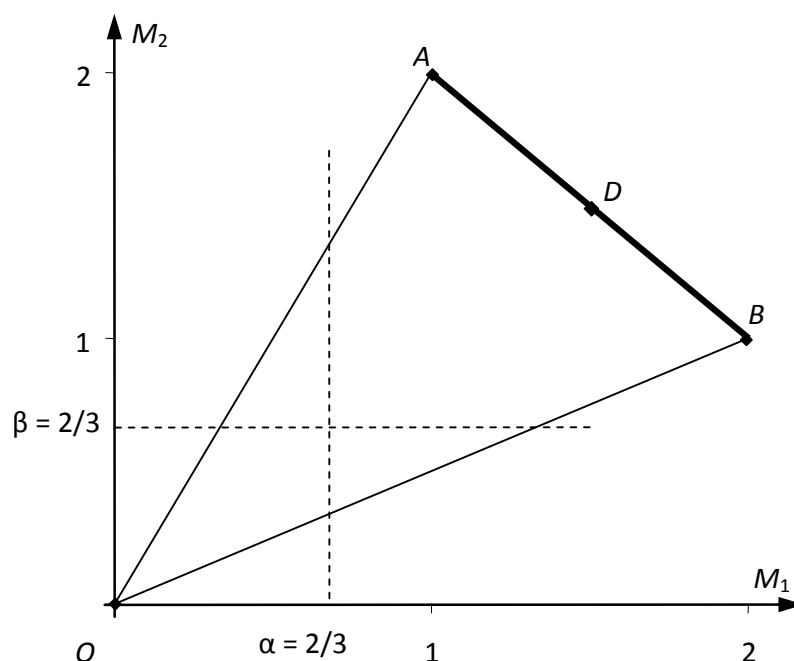
Прямая, проходящая через точки  $A(1, 2)$  и  $B(2, 1)$ , задается уравнением  $M_2 = 3 - M_1$ , поэтому функция Нэша

$$\begin{aligned} N(M_1, M_2) &= \left(M_1 - \frac{2}{3}\right) \left(M_2 - \frac{2}{3}\right) = \left(M_1 - \frac{2}{3}\right) \left(3 - M_1 - \frac{2}{3}\right) = \\ &= \left(M_1 - \frac{20}{3}\right) \left(\frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1\right) = -M_1^2 + 3M_1 - \frac{14}{9}. \end{aligned}$$

Эта функция достигает максимума при  $M_1^* = (-3)/[2 \cdot (-1)] = 1,5$ . При этом  $M_2^* = 3 - M_1^* = 1,5$ .

Точка  $(M_1^*, M_2^*)$  на рис. 10.3.3 обозначена  $D$ . Она находится ровно посередине отрезка  $AB$ , поэтому решение Нэша таково:  $\mathbf{p}^* = (1/2, 1/2)$  и  $\mathbf{q}^* = (1/2, 1/2)$ .

Это означает, что игроки могут договориться выбирать (случайным образом и независимо друг от друга) в половине случаев театр, и в другой половине — футбол, тогда выигрыш каждого составит в среднем 1,5 единицы за один вечер.  $\square$



**Рис. 10.3.3.** Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в кооперативном варианте игры «Семейный спор»

**ПРИМЕР 10.3.5.** Требуется провести анализ биматричной игры, заданной матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Пусть  $\mathbf{p} = (p, 1-p)$  и  $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ , где  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [0, 1]$ , — смешанные стратегии игроков. Тогда математические ожидания выигрышей игроков равны соответственно

$$M_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 6pq + 9p(1-q) + 8(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = (6-9p)q + 7p + 2,$$

$$M_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 9pq + 7p(1-q) + 4(1-p)q + 10(1-p)(1-q) = (8q-3)p - 6q + 10.$$

Максиминные стратегии игроков определяются из условий

$$\alpha = \max_{p \in [0, 1]} \min_{q \in [0, 1]} ((6-3p)q + p + 2) = \max \left\{ \max_{p \in [0, 2/3]} (7p + 2), \max_{p \in [2/3, 1]} (8-2p) \right\} = \frac{20}{3}$$

(где максимум достигается при  $p^* = 2/3$ ),

$$\beta = \max_{q \in [0, 1]} \min_{p \in [0, 1]} ((8q-3)p - 6q + 10) = \max \left\{ \max_{q \in [0, 3/8]} (2q + 7), \max_{q \in [3/8, 1]} (10-6q) \right\} = \frac{31}{4}$$

(где максимум достигается при  $q^* = 3/8$ ).

Таким образом, максиминные стратегии первого и второго игрока равны  $\mathbf{p} = (2/3, 1/3)$  и  $\mathbf{q} = (3/8, 5/8)$ , а их гарантированные выигрыши составляют  $20/3$  и  $31/4$  соответственно.

Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником  $ABCD$  на рис. 10.3.4. Очевидно, множество Парето соответствует отрезку  $BC$ , а переговорное множество — отрезку  $EF$ .

Прямая, проходящая через точки  $B(6, 9)$  и  $C(9, 7)$ , задается уравнением  $M_2 = 13 - 2M_1/3$ , поэтому функция Нэша

$$\begin{aligned} N(M_1, M_2) &= \left( M_1 - \frac{20}{3} \right) \left( M_2 - \frac{31}{4} \right) = \left( M_1 - \frac{20}{3} \right) \left( 13 - \frac{2}{3}M_1 - \frac{31}{4} \right) = \\ &= \left( M_1 - \frac{20}{3} \right) \left( \frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1 \right) = -\frac{2}{3}M_1^2 + \frac{349}{36}M_1 - 35 \end{aligned}$$

на отрезке  $M_1 \in [20/3, 63/8]$  (т. е. на отрезке  $EF$ ; при  $M_2 = 31/4$  значение  $M_1 = 3(13 - 31/4)/2 = 63/8$ ) достигает максимума в точке  $M_1^* = 349/48$ . При этом  $M_2^* = 13 - 2M_1^*/3 = 587/72$ . Эта точка на рис. 10.3.4 обозначена  $G$ .

Точка  $G(349/48, 587/72)$  является выпуклой комбинацией точек  $B(6, 9)$  и  $C(9, 7)$ , т. е.

$$\begin{cases} 6\lambda + 9(1-\lambda) = 349/48, \\ 9\lambda + 7(1-\lambda) = 587/72, \end{cases}$$

откуда  $\lambda = 83/144$ .

Точка  $B$  соответствует выбору обоими игроками своих первых чистых стратегий, точка  $C$  соответствует выбору первым игроком своей первой чистой стратегии, а вторым игроком — своей второй чистой стратегии, поэтому точка  $G$  соответствует тому, что первый игрок выбирает свою первую чистую стратегию, а второй игрок с вероятностью  $q^* = \lambda = 83/144$  выбирает первую чистую стратегию, и с вероятностью  $1 - q^* = 61/144$  — вторую чистую стратегию.

Таким образом, решение Нэша таково:  $\mathbf{p}^* = (1, 0)$ ,  $\mathbf{q}^* = (83/144, 61/144)$ . При этом средний выигрыш первого игрока равен  $M_1^* = 349/48$ , а средний выигрыш второго игрока —  $M_2^* = 587/72$ .  $\square$

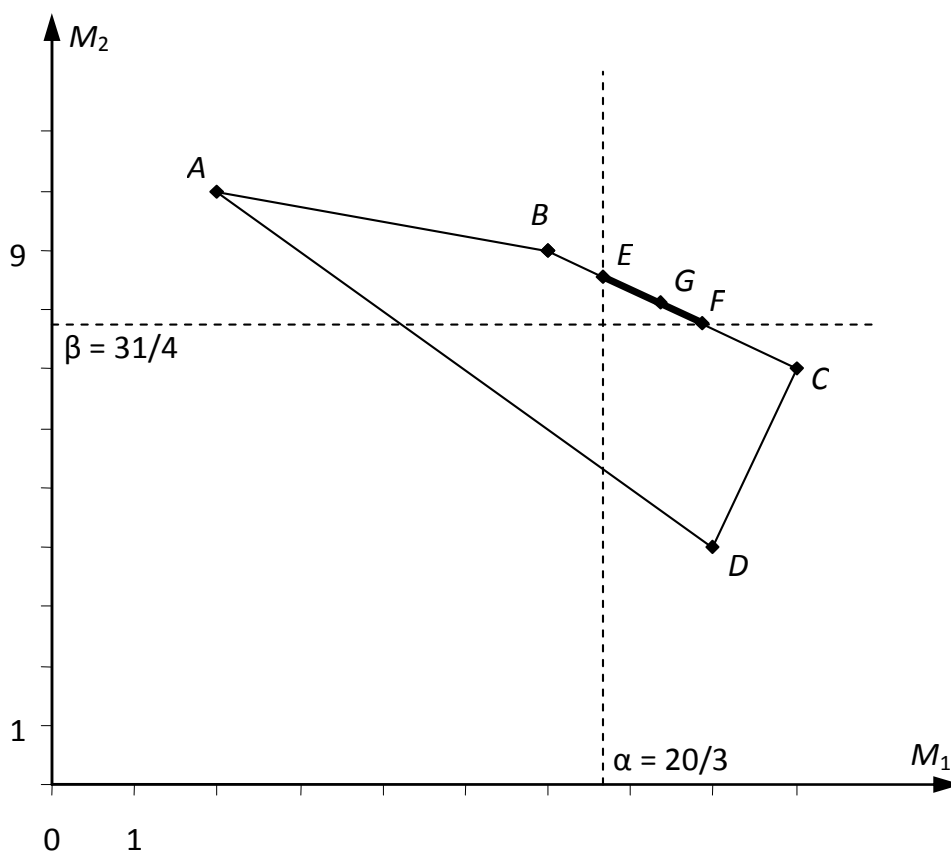


Рис. 10.3.4. Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в примере 10.3.5

## § 10.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ

Игра с нулевой или ненулевой суммой называется *непрерывной*, если множества стратегий участников игры целиком заполняют некоторые отрезки.

Смешанные стратегии в непрерывных играх задаются уже не наборами вероятностей, а функциями (или плотностями) распределения непрерывных случайных величин на соответствующих отрезках. При этом математические ожидания выигрышей из сумм превращаются в интегралы.

Можно доказать, что если в непрерывной игре с нулевой суммой функция выигрыша первого игрока непрерывна по всем переменным, то у игроков есть оптимальные смешанные стратегии.

Рассмотрим пример непрерывной игры с нулевой суммой.

**ПРИМЕР 10.4.1 (Игра «Шумная дуэль»).** В дуэли принимают участие двое. В начальный момент дуэлянты находятся на расстоянии  $d_0$  и по команде начинают сближаться. В распоряжении каждого дуэлянта имеется один выстрел, который он может произвести в противника с любого расстояния (конечно при условии, что дуэлянт жив), он может даже подойти к противнику вплотную. Пусть функции  $p_k(d)$  задают вероятности поражения противника  $k$ -м игроком ( $k = 1, 2$ ) с расстояния  $d$ . Предположим, что эти функции непрерывны и убывают на отрезке  $[0, d_0]$ . Рассматривается шумная дуэль, когда противники слышат выстрелы друг друга. Требуется формализовать поведение игроков в виде непрерывной игры с нулевой суммой и определить оптимальные чистые стратегии игроков (если такие стратегии существуют).

**Решение.** Стратегии первого и второго игроков определяются выбором чисел  $x \in [0, d_0]$ ,  $y \in [0, d_0]$  — расстояний, с которых дуэлянты намереваются произвести свои выстрелы.

Выигрышем  $F(x, y)$  первого дуэлянта, если он стреляет с расстояния  $x$ , а его противник — с расстояния  $y$ , удобно считать вероятность того, что первый дуэлянт поразит второго. Очевидно,

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \leq y \leq x \leq d_0, \\ 1 - p_2(y), & 0 \leq x < y \leq d_0. \end{cases}$$

(Здесь мы учли, что если  $x < y$ , и второй игрок промахнется, то первый, услышав выстрел противника, стреляет в него с расстояния 0 вместо  $x$ .)

Покажем, что шумная дуэль имеет решение в чистых стратегиях: эти стратегии таковы:  $d^*$  для первого дуэлянта,  $d^*$  для второго, при этом цена игры равна  $p_1(d^*)$  [здесь  $d^*$  — единственный корень уравнения  $p_1(d^*) = 1 - p_2(d^*)$ ]. Действительно,

$$F(d^*, d^*) = p_1(d^*), \quad F(x, d^*) = \begin{cases} p_1(x) \leq p_1(d^*), & d^* \leq x \leq d_0, \\ 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*), & 0 \leq x < d^*, \end{cases}$$

$$F(d^*, y) = \begin{cases} p_1(d^*), & 0 \leq y \leq d^*, \\ 1 - p_2(y) \geq 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*), & d^* < y \leq d_0. \end{cases}$$

Таким образом,  $F(x, d^*) \leq F(d^*, d^*) \leq F(d^*, y)$  для любых  $x \in [0, d_0]$ ,  $y \in [0, d_0]$ , откуда и следует, что  $(d^*, d^*)$  — седловая точка данной игры.

В частности, если меткость игроков одинакова [т. е.  $p_1(x) = p_2(x)$ ], то цена игры, очевидно, равна  $1/2$ , а  $d^*$  является корнем уравнения  $p_1(d^*) = 1/2$ .  $\square$

В бесшумной дуэли игроки не слышат выстрелов друг друга, поэтому

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \leq y \leq x \leq d_0, \\ p_1(x)(1 - p_2(y)), & 0 \leq x < y \leq d_0. \end{cases}$$

Читателю предлагается доказать, что бесшумная дуэль не имеет решений в чистых стратегиях.

Переходя к рассмотрению непрерывных игр с непротивоположными интересами, отметим, что решение Нэша (и в конечных играх, и в непрерывных) имеет серьезный недостаток, который заключается в том, что оно не принимает в расчет угрозы. Это иллюстрирует пример игры «Работодатель — работник», в которой работник имеет возможность установить интенсивность своей работы от 100% (полезность этой ситуации для работника оценивается нулем, а для работодателя прибылью 1 млн. руб.) до 0% (в этом случае работник будет голодать, и полезность этой ситуации для работника оценивается в –500 000 руб., а работодатель получит нулевую прибыль). Работодатель может поделиться с работником частью прибыли (если захочет). Минимаксные выигрыши игроков равны нулю, а решение Нэша (в чем мы предлагаем убедиться читателю) состоит в том, что работодатель и работник делят прибыль поровну — по 500 тыс. руб. Однако при этом игнорируется тот факт, что работодатель находится в гораздо более выгодном положении, чем работник. Действительно, работник может воспрепятствовать работодателю, только решившись на очень трудный шаг; угроза прекратить работу с его стороны не очень правдоподобна, и в результате работник, скорее всего, будет продолжать работать за зарплату даже в том случае, если работодатель не будет делиться с ним прибылью. Угроза же работодателя уменьшить сумму, которой он делится с работником, вполне реальна.

Другие примеры непрерывных игр с ненулевой суммой, описывающие взаимодействие фирм на рынке одного товара, рассматриваются в следующей главе.

## § 10.5. Позиционные игры

Все игры, которые рассматривались в этой главе до сих пор, были заданы в так называемой *нормальной форме*, которая предполагает, что:

- 1) задано множество игроков  $I$  (не ограничивая общности, можно считать, что  $k$  игроков заданы своими номерами, т. е.  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ ;
- 2) для каждого игрока  $i \in I$  задано множество возможных стратегий  $\{x_i\}$ ;
- 3) для каждой *ситуации* (т. е. совместного выбора игроками своих стратегий:  $x_1$  — первым игроком,  $x_2$  — вторым, ...,  $x_k$  —  $k$ -м игроком) заданы выигрыши игроков:  $H_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$  — первого,  $H_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$  — второго, ...,  $H_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$  —  $k$ -го, т. е. заданы *функции выигрышей*.

**ПРИМЕР 10.5.2 (ИГРА «УГАДЫВАНИЕ МОНЕТЫ» В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ).**

Требуется составить нормальную форму игры из примера 6.1.2.

**Решение.** В игре, рассмотренной в примере 6.1.2, множество игроков  $I = \{1, 2\}$ , множество стратегий первого игрока

$$\{x_1^1 = \text{«спрятать 1 руб.»}, x_1^2 = \text{«спрятать 5 руб.»}\},$$

множество стратегий второго игрока

$$\{x_2^1 = \text{«назвать 1 руб.»}, x_2^2 = \text{«назвать 5 руб.»}\},$$

а функции выигрышей игроков, очевидно, задаются так:

$$\begin{aligned} H_1(x_1^1, x_2^1) &= -1, & H_2(x_1^1, x_2^1) &= 1, \\ H_1(x_1^1, x_2^2) &= 3, & H_2(x_1^1, x_2^2) &= -3, \\ H_1(x_1^2, x_2^1) &= 3, & H_2(x_1^2, x_2^1) &= -3, \\ H_1(x_1^2, x_2^2) &= -5, & H_2(x_1^2, x_2^2) &= 5. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $H_2(x_1, x_2) = -H_1(x_1, x_2)$ .  $\square$

П а р т и я игры, заданной в нормальной форме, состоит в о д н о - в р е м е н н о м выборе игроками своих стратегий. Во многих случаях, между тем, игроки делают выбор п о с л е д о в а т е л ь н о.

Такие игры называются *позиционными*. Процесс позиционной игры состоит в последовательном переходе от одной п о з и ц и и к другой, который осуществляется либо путем выбора игроками возможных а л ь - т е р н а т и в в соответствии с правилами игры, либо случайным образом (в этом случае говорят о с л у ч а й н о м х о д е).

Множество позиций в такой игре можно представить в виде упорядоченного множества, которое называется *деревом игры*, и представляет собой граф без циклов, в котором некоторые из вершин называются *окончательными* и соответствуют моменту окончания партии и расплаты — известны выигрыши каждого из игроков при достижении этих вершин; каждая из неокончательных вершин соответствует либо выбору конкретным игроком одной из возможных альтернатив, либо случайному ходу; среди неокончательных вершин выделена н а ч а л ь н а я в е р ш и н а (соответствующая началу партии игры).

Различают позиционные игры с полной информацией и с неполной. В и г р а х с п о л н о й и н ф о р м а ц и е й каждый игрок при своем ходе знает, в какой позиции дерева игры он находится. В и г р а х с н е п о л н о й и н ф о р м а ц и е й игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции он находится, игроку известно лишь *информационное множество* — некоторое множество позиций, включающее не только ту позицию, в которой фактически находится игрок, но также и другие позиции (в которых игрок мог бы находиться).

**ПРИМЕР 10.5.2 (ПОЗИЦИОННАЯ ИГРА «УГАДЫВАНИЕ МОНЕТЫ» С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ).** Требуется проанализировать игру, описанную в примере 6.1.2, в ситуации, когда второй игрок имеет возможность *п о д г л я д е т ь*, какую монету спрятал первый.

**Решение.** Дерево игры изображено на рис. 10.5.1. Серым цветом на рис. 10.5.1 выделены информационные множества игроков.

Стратегии первого игрока таковы:

$$x_1^1 = \text{«спрятать 1 руб.»}, \quad x_1^2 = \text{«спрятать 5 руб.»},$$

а стратегию второго игрока удобно задавать в виде пары альтернатив  $[y_1, y_2]$ , где

$$y_1, y_2 \in \{x_2^1 = \text{«назвать 1 руб.»}, x_2^2 = \text{«назвать 5 руб.»}\},$$

первая из этих альтернатив  $y_1$  соответствует выбору второго игрока в случае выбора первым его первой альтернативы, а вторая альтернатива  $y_2$  соответствует выбору второго игрока в случае выбора первым игроком его второй альтернативы.

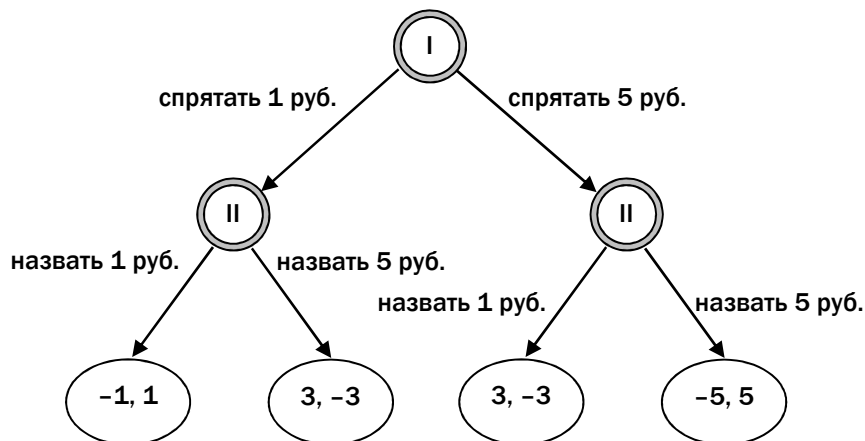
Очевидно, у второго игрока есть четыре чистых стратегии:

$$[x_2^1, x_2^1], \quad [x_2^1, x_2^2], \quad [x_2^2, x_2^1], \quad [x_2^2, x_2^2].$$

Выигрыши игроков удобно свести в матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \quad (10.5.1)$$

Строки этой матрицы соответствуют выбору первым игроком своих стратегий  $x_1^1$  и  $x_1^2$ , а столбцы — выбору вторым игроком своих стратегий  $[x_2^1, x_2^1]$ ,  $[x_2^1, x_2^2]$ ,  $[x_2^2, x_2^1]$  и  $[x_2^2, x_2^2]$ . Элементы матрицы равны соответствующим выигрышам первого игрока (в данной игре выигрыш второго игрока противоположен выигрышу первого).



**Рис. 10.5.1.** Дерево позиционной игры «Угадывание монеты» с полной информацией

Например, в левой верхней клетке матрицы стоит выигрыш первого игрока, если он выбрал стратегию  $x_1^1 = \text{«спрятать 1 руб.»}$ , а второй игрок выбрал стратегию  $[x_2^1, x_2^1]$  (т. е. независимо от того, какую альтернативу выбрал первый игрок, второй называет 1 руб.). Итак, первый игрок спрятал 1 руб., а второй игрок навал 1 руб., значит, выигрыш первого игрока равен  $-1$  руб. Выигрыши в остальных ситуациях определяются точно таким же образом.

Данная матричная игра имеет седловую точку  $(-1)$ , которая соответствует первой строке и второму столбцу платежной матрицы (10.5.1), т. е. выбору первым игроком своей стратегии  $x_1^1 = \text{«спрятать 1 руб.»}$ , а вторым игроком — стратегии  $[x_2^1, x_2^2]$  (т. е. назвать 1 руб., если первый игрок спрятал 1 руб., и 5 руб., если первый игрок спрятал 5 руб.).  $\square$

Подобная ситуация для позиционных игр с полной информацией типична — в только что рассмотренном примере содержится идея доказательства следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА.** *Любая позиционная игра с полной информацией эквивалентна некоторой матричной игре, в которой существует седловая точка в чистых стратегиях.*

Эта теорема означает, в частности, существование оптимальных чистых стратегий в играх типа шахмат и шашек; такие оптимальные стратегии пока не известны, но лишь потому, что платежная матрица, к которой сводится, например, шахматная игра, очень велика по размеру, и ее анализ современным компьютерам пока не под силу, однако развитие технологии распределенных вычислений в интернете, по-видимому, в ближайшие десятилетия приведет к отысканию оптимальных шахматных стратегий.

Иное дело обстоит с позиционными играми с неполной информацией (к таким играм относятся, например, домино и большинство карточных игр). Рассмотрим конкретный пример.

**ПРИМЕР 10.5.2 (ПОЗИЦИОННАЯ ИГРА «УГАДЫВАНИЕ МОНЕТЫ» С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ).** Требуется проанализировать игру «Угадывание монеты» как позиционную игру с неполной информацией.

**Решение.** Информационные множества игроков в таком случае закрашены серым на рис. 10.5.2.

Теперь мы получили позиционную игру с неполной информацией: второму игроку в момент его хода известно информационное множество, но неизвестна конкретная позиция из информационного множества, в которой он находится (левая или правая на рис. 10.5.2).

В этом случае первый игрок имеет две стратегии:

$$x_1^1 = \text{«спрятать 1 руб.»}, \quad x_1^2 = \text{«спрятать 5 руб.»},$$

и поскольку второму игроку выбор первого неизвестен, у второго игрока есть две стратегии:

$$x_2^1 = \text{«назвать 1 руб.»}, \quad x_2^2 = \text{«назвать 5 руб.»}.$$

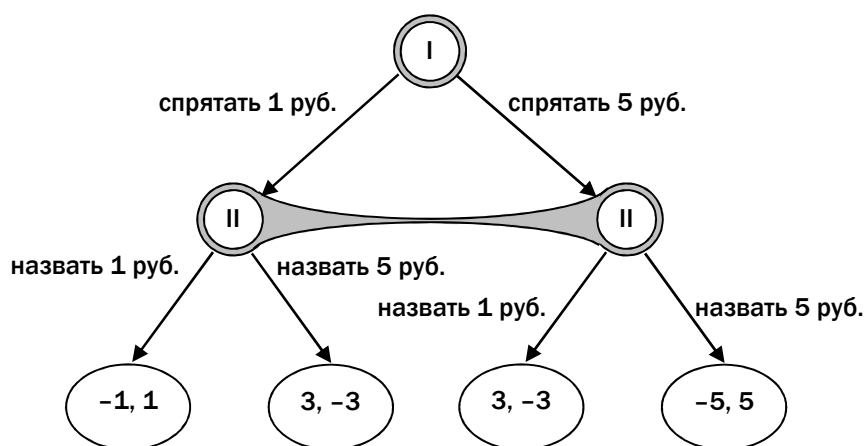


Рис. 10.5.2. Дерево позиционной игры «Угадывание монеты» с неполной информацией

Матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

выигрышей первого игрока в зависимости от выбора игроками своих стратегий была нами подробно исследована в параграфе 6.1: эта матрица не имеет седловой точки в чистых стратегиях, а оптимальные смешанные стратегии игроков таковы:  $\mathbf{p}^* = (2/3, 1/3)$ ,  $\mathbf{q}^* = (2/3, 1/3)$ , при этом цена игры равна  $v = 1/3$ .  $\square$

Применим теперь аппарат теории игр к исследованию конкуренции производителя коммерческого программного обеспечения с пиратами.

**ПРИМЕР 10.5.3 (Игра «ПРОВЕРКА ЛЕГАЛЬНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ»).** Производитель программного обеспечения продает лицензии на использование своей продукции. Пользователь имеет возможность приобрести лицензионную копию программного продукта (по цене  $c$  ден. ед.) или пиратскую (по цене  $d$  ден. ед.). При этом полезность, которую приносит использование нелегальной копии программного обеспечения, в точности равна полезности от использования легальной копии, а себестоимость изготовления одной копии (и легальной, и пиратской) пренебрежимо мала по сравнению со всеми остальными величинами. Поскольку значительная часть пользователей пользуются нелегальными копиями, производитель может предпринимать определенные меры по изобличению пользователей пиратских копий и привлечению их к ответственности. При этом он понесет определенные издержки по организации проверки легальности использования программного обеспечения (в размере  $l$  ден. ед. на проверку каждого пользователя), но если будет обнаружено незаконное использование программного продукта, пользователь заплатит в пользу производителя штраф (в размере  $f$  ден. ед.). Требуется проанализировать данную конфликтную ситуацию.

**Решение.** Очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$f > l > c \gg d > 0; \quad f > c + l.$$

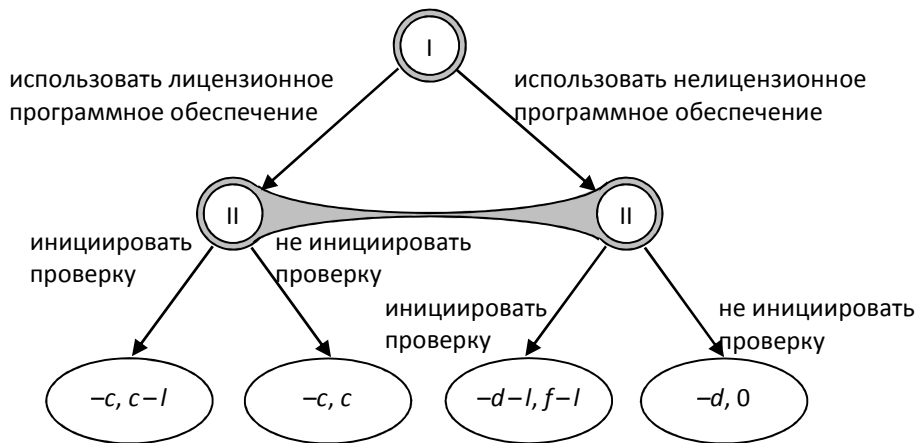
Будем считать также, что

$$l > 2c$$

(последнее неравенство эквивалентно тому, что  $c - l < -c$ ).

Данная конфликтная ситуация является типичной иллюстрацией асимметрии информации, когда пользователь знает происхождение своего программного обеспечения (легальное оно или пиратское), а производитель (и государство) не может отличить «честного» пользователя от пользователя — пирата.

Рассмотрим позиционную форму игры и построим ее дерево (рис. 10.5.3). Первым игроком является пользователь, он осознанно принимает одно из двух решений: приобрести лицензионное или пиратское программное обеспечение. Производитель является вторым игроком, поскольку он может принять решение по инициации проверки только после того, как пользователь сделает свой ход.



**Рис. 10.5.3.** Дерево позиционной игры  
«Проверка легальности программного обеспечения»

Поскольку производитель в момент принятия решения не знает, в какой из двух точек зоны неопределенности он находится, данная конфликтная ситуация формализуется с помощью биматричной игры с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} -c & -c \\ -f-d & -d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c-l & c \\ f-l & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки соответствуют стратегиям первого игрока (пользователя):

- использовать лицензионное программное обеспечение;
- использовать нелицензионное программное обеспечение.

Столбцы соответствуют стратегиям второго игрока (производителя):

- инициировать проверку лицензий на использование пользователем программного обеспечения;
- не инициировать такую проверку.

Пусть

$$\mathbf{p} = (p; 1 - p), \quad \mathbf{q} = (q; 1 - q) \text{ —}$$

смешанные стратегии игроков: пользователь с вероятностью  $p$  приобретает лицензионное программное обеспечение [и с вероятностью  $(1 - p)$  — нелицензионное], производитель с вероятностью  $q$  инициирует проверку лицензий [и с вероятностью  $(1 - q)$  не инициирует].

Множество возможных исходов игры в зависимости от выбора игроками смешанных стратегий представлено на рис. 10.5.4.

Максиминные выигрыши пользователя и производителя равны соответственно

$$\alpha = \max\{-c; -d - f\} = -c, \quad \beta = \max\{c - l; 0\} = 0.$$

Множество Парето-оптимальных исходов — это ломаная  $ABC$ , а переговорное множество, отсекаемое от множества Парето максиминными выигрышами, — это выделенный жирным на рис. 10.5.4 отрезок

$$BC = \left\{ \left( \pi_1; \pi_2 = -\frac{c(\pi_1 + d)}{c - d} \right) \middle| \pi_1 \in [-c; -d] \right\}.$$

Решение Нэша определяется максимумом функции Нэша:

$$\begin{aligned} \max_{(\pi_1; \pi_2) \in BC} N(\pi_1; \pi_2) &= \max_{(\pi_1; \pi_2) \in BC} ((\pi_1 - \alpha)(\pi_2 - \beta)) = \\ &= \max_{\pi_1 \in [-c; -d]} \left( (\pi_1 - (-c)) \left( -\frac{c(\pi_1 + d)}{c - d} - 0 \right) \right) = \max_{\pi_1 \in [-c; -d]} \left( -\frac{c(\pi_1 + d)(\pi_1 + c)}{c - d} \right) = \frac{c(c - d)}{4}, \end{aligned}$$

который достигается при

$$\pi_1 = -\frac{c + d}{2}, \quad \pi_2 = \frac{c}{2},$$

что соответствует смешанным стратегиям игроков

$$\mathbf{p}_N = (1/2; 1/2), \quad \mathbf{q}_N = (0; 1).$$

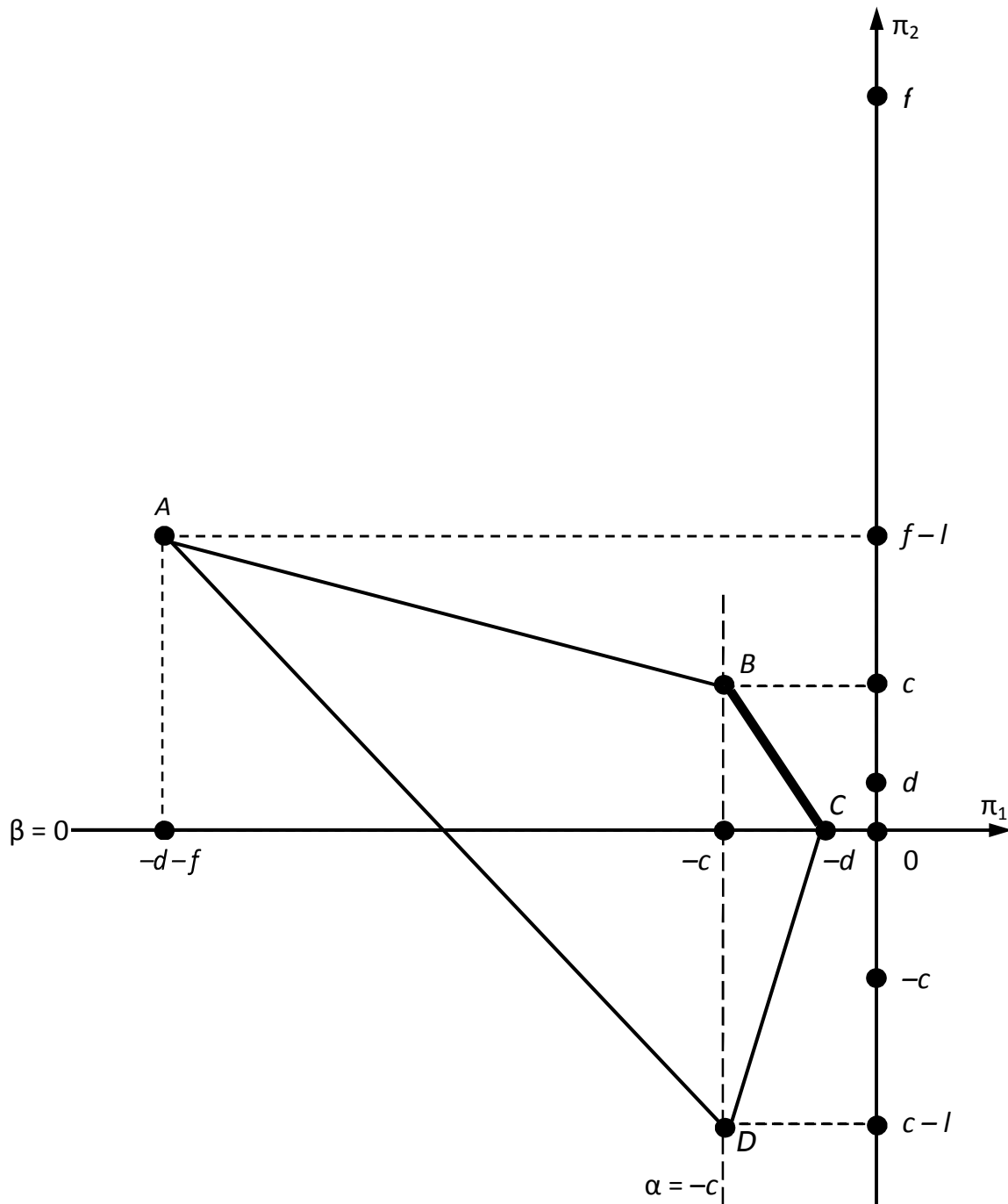
Итак, рациональный потребитель в половине случаев предпочтет использование нелицензионного программного обеспечения, а рациональному производителю никогда не выгодно инициировать проверку лицензий.

Если считать функции полезности и пользователя, и производителя строго возрастающими, принципиальных изменений в конфликтной ситуации не произойдет.

Таким образом, вне зависимости от склонности производителей и пользователей программного обеспечения к риску, рациональный пользо-

ватель только в половине случаев предпочтет приобрести лицензионное программное обеспечение, а рациональный производитель никогда не будет инициировать проверку легальности использования его продукта пользователями.

Так будет всегда, пока цена лицензии  $c$  будет больше цены пиратской копии  $d$ . В случае же, когда  $c = d$ , очевидно, пользователь предпочтет приобрести легальную копию, но при этом прибыль производителя существенно сократится (если не превратится в убытки).  $\square$



**Рис. 10.5.4.** Множество возможных исходов игры  
«Проверка легальности программного обеспечения»

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Как на практике организовать реализацию смешанных стратегий?
2. Каждый из двух игроков (первый и второй) могут показать «камень» (кулак), «ножницы» (указательный и средний пальцы) или «бумагу» (ладонь). Камень тупит ножницы (и поэтому камень выигрывает у ножниц 1 руб.), ножницы режут бумагу (и поэтому ножницы выигрывают у бумаги 1 руб.), а бумага заворачивает камень (и поэтому бумага выигрывает у камня 1 руб.). Все остальные случаи приводят к ничье. Каковы оптимальные стратегии игроков?
3. Для матричных игр, заданных своими платежными матрицами, найдите нижнюю и верхнюю цену, и сравните выигрыш первого игрока при оптимальной стратегии и при максиминной стратегии:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Докажите, что если первый игрок будет играть в соответствии со своей оптимальной смешанной стратегией, а второй игрок выберет свою  $j$ -ю чистую стратегию (при условии, что  $j$ -я компонента вектора оптимальной смешанной стратегии второго игрока строго больше нуля), то математическое ожидание выигрыша первого игрока будет равным цене игры.
5. Производитель премиальных кондитерских изделий ежедневно изготавливает и продает от одного до трех эксклюзивных тортов. Срок годности торта ограничен: если торт не продан за один день, его приходится утилизировать (стоимость утилизации — 500 руб.). Если спрос на торты превышает их фактически произведенное количество, недостающие торты обязательно нужно произвести, но это придется делать в сверхурочное время. При нормальном производственном цикле себестоимость одного торта составляет 5000 руб., при сверхурочной работе — 7000 руб. Все торты реализуются по цене в 10 000 руб. Вероятности того, что дневной спрос составит 1, 2 и 3 торта, равны соответственно 0,4, 0,5 и 0,1. Составьте матрицу последствий и матрицу сожалений, определите решения по критериям Вальда, Сэвиджа, максимального ожидаемого дохода и минимальных ожидаемых сожалений.
6. Две фирмы продают конкурирующие товары. Каждая из фирм должна решить, имеет ли смысл устраивать рекламную компанию. Если обе фирмы решат рекламировать свои товары, то первая фир-

ма получит чистую прибыль в размере 10 млн. руб., а вторая фирма — в размере 6 млн. руб. Если первая фирма будет рекламировать свой товар, а вторая не будет, то первая фирма получит прибыль 15 млн. руб., а прибыль второй фирмы окажется равной нулю. Если первая фирма не будет проводить рекламную кампанию, а вторая — будет, то прибыль первой фирмы будет равна 5 млн. руб., а прибыль второй фирмы — 8 млн. руб. Если же обе фирмы откажутся от проведения рекламной кампании, то первая фирма получит прибыль 10 млн. руб., а вторая — 2 млн. руб. Каковы оптимальные стратегии фирм?

7. Два производителя продают на рынке один товар. Каждый из них может назначить цену товара: 400 руб. или 600 руб. Если оба производителя назначили цену 400 руб., то каждый из них получает чистую прибыль 12 млн. руб. Если оба производителя назначили цену 600 руб., то каждый из них получает чистую прибыль 16 млн. руб. Если же один назначил цену 400 руб., а другой 600 руб., то тот производитель, который назначил меньшую цену, получает прибыль 20 млн. руб., а его конкурент получает прибыль 4 млн. руб. Как должны выбирать свои стратегии игроки в зависимости от того, разрешаются или запрещаются соглашения между ними?
8. Покупатель (второй игрок) приходит на рынок за яблоками. Продавец (первый игрок) использует пружинные весы и имеет две стратегии: честно взвесить 1 кг яблок или подкрутить пружину и обвесить покупателя на 200 г. У покупателя также две стратегии: поверить продавцу или взвесить покупку на контрольных весах и в случае обмана потребовать возмещения ущерба. Предложите свой вариант матриц выигрышей и определите наиболее рациональное поведение игроков. Рассмотрите как ситуацию, в которой покупатель не способен заметить, обвешивает ли его продавец, так и ситуацию, в которой покупатель видит, честно ли ведет себя продавец.
9. В настоящее время некоторый товар на рынке продается единственным монополистом (первым игроком) по цене 100 руб. Емкость рынка составляет 1 млн. единиц товара. На этот рынок с аналогичным товаром хочет войти другая фирма (второй игрок). Для входа в отрасль вторая фирма должна произвести инвестиции в строительство завода в размере 40 млн. руб. Если вторая фирма не будет входить на рынок, то первая фирма может продолжать продавать товар по 100 руб., и тогда ее выручка составит 100 млн. руб. (а прибыль второй фирмы будет нулевой). Если же вторая фирма войдет на рынок, и при этом цена товара останется на прежнем уровне (100 руб.), то каждая из двух фирм получит по 50 млн. руб. выручки, но выигрыш второй фирмы составит 10 млн. руб. (из выручки мы вычли инвестиции в строительство завода). Первая фирма может (для защиты от входа на рынок) понизить цену до 60 руб. Если в этом случае конкурент все-таки выйдет на рынок, то выручка каждой из фирм будет равна 30 млн. руб., при этом вторая фирма проиграет 10 млн. руб. (с учетом инвестиций в строительство заво-

- да). Если же первая фирма установит низкую цену (60 руб.), а вторая фирма не войдет на рынок, то прибыль первой фирмы будет равна 60 млн. руб. Каковы оптимальные стратегии фирм?
10. Две фирмы выпустили к Дню 8 марта новые конфеты. Каждая из двух фирм позиционирует свои конфеты как самый лучший подарок к женскому празднику, при этом фирмы имеют возможность рекламировать свои товары в дневных или в вечерних телепередачах. Если обе фирмы будут рекламировать свой товар как самый лучший одновременно — в дневной (или вечерней) телепередаче, то покупатели усмотрят в этом противоречие и не станут покупать ни один, ни другой сорт конфет (выигрыши обеих фирм при этом будут равны нулю, как и в том случае, когда фирмы вовсе не будут рекламировать свои товары). Если одна фирма выступит с рекламным объявлением днем (вечером), а другая фирма в это время выступать не будет, то первая фирма привлечет столько покупателей, что ее выигрыш можно будет оценить единицей (соответственно двумя единицами). Каковы оптимальные стратегии игроков?
  11. Докажите, что бесшумная дуэль не имеет седловой точки в чистых стратегиях.
  12. Хорошенькая девушка Маша может прийти на дискотеку (которая продолжается четыре часа) в момент времени  $t \in [0, 4]$ . Каждый из двух ее воздыхателей — Коля и Миша — приходит на дискотеку только один раз в этот вечер. Если в момент прихода одного из игроков Маша находится на дискотеке одна, то она весь вечер танцует с этим игроком (и этот игрок выигрывает у своего противника единицу). Если же в момент прихода кого-либо из воздыхателей Маши на дискотеке нет, или она уже танцует с «конкурентом», поклонник уходит и больше в этот вечер на дискотеку не возвращается. Если ни один из игроков не танцевал с Машей, то выигрыш каждого из них равен нулю. Каковы оптимальные стратегии игроков?
  13. Правила игры таковы. Имеется круглый стол и бесконечно много одинаковых круглых монет. Первый и второй игроки по очереди кладут на стол по одной монете (монета должна целиком лежать на столе и не накладываться на другие монеты). Выигрывает тот, кто положит на стол последнюю монету. Каковы оптимальные стратегии игроков?
  14. На аукцион выставляется 1000 руб. Два участника игры по очереди называют сумму, которую они готовы отдать за получение 1000 руб. в обмен на предложенную цену. Предложивший наибольшую заявку получает 1000 руб. в обмен на предложенную цену, а сделавший вторую по величине заявку должен отдать предложенную им сумму и не получить взамен ничего. Каковы оптимальные стратегии игроков?
  15. Ведущий телешоу предлагает участнику показать на одну из трех закрытых дверей, за которыми находятся «Мерседес» и два козла. После этого ведущий открывает одну из невыбранных дверей, за которой находится козел, и вторично предлагает участнику открыть

одну из оставшихся дверей. Если за этой дверью окажется «Мерседес», то он достается участнику в качестве приза, а если за дверью стоит козел, то участник ничего не получает. Каковы оптимальные стратегии ведущего и участника телешоу?

16. Игра продолжается  $N$  периодов. Первый игрок (нарушитель) хочет совершить в одном из этих периодов некоторое запрещенное действие, а второй игрок (инспектор), который желает это действие предотвратить, может провести в одном из  $N$  периодов проверку нарушителя. Выигрыш нарушителя в каждом периоде равен 1, если он провел запрещенное действие, а инспектор в этом периоде проверку не проводил, выигрыш равен  $-1$ , если инспектор поймал нарушителя, выигрыш равен нулю, если нарушитель не действует вовсе. Каковы оптимальные стратегии игроков?
17. Убедитесь в том, что в игре «Работодатель — работник», рассмотренной в параграфе 10.4, решение Нэша соответствует точке, в которой работодатель и работник делят прибыль поровну — по 500 тыс. руб.

## ГЛАВА 11. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФИРМ НА КОНКУРЕНТНЫХ РЫНКАХ

### § 11.1. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

Рассмотрим, как применяются непрерывные игры с ненулевой суммой к изучению конкуренции фирм на рынках. Случай, когда на рынке действует большое число участников, называется *конкуренцией*; если число участников рынка велико, но конечно, то конкуренция носит название *несовершенной*, если же число участников стремится к бесконечности, конкуренция называется *совершенной*. Случай, когда число фирм на рынке мало, называется *олигополией*. Вначале рассмотрим простейший вид олигополии — *дуополию*, когда продавцов на рынке всего двое.

Пусть на рынке есть два продавца, предлагающих один и тот же товар. Если  $x_1$  и  $x_2$  — объемы продукции, выпущенные соответственно первой фирмой и второй, то рыночная цена товара  $p$ , очевидно, зависит от суммарного предложения:

$$p = p(x_1 + x_2).$$

Предположим для простоты, что эта зависимость линейна:

$$p(x_1 + x_2) = a - b(x_1 + x_2),$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Для упрощения выкладок будем считать также, что издержки фирм описываются одинаковыми линейными функциями от объемов их выпуска:

$$C_i(x_i) = cx_i + d, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $C_i(x_i)$  — полные издержки  $i$ -й фирмы при выпуске  $x_i$  единиц товара,  $c > 0$  — предельные издержки,  $d > 0$  — постоянные издержки. Предположение одинаковых функций издержек означает, что оба конкурента используют идентичные технологии.

Прибыль  $i$ -й фирмы ( $\Pi_i$ ) зависит от объемов выпуска обоих конкурентов:

$$\begin{aligned}\Pi_i(x_1, x_2) &= p(x_1 + x_2)x_i - C_i(x_i) = (a - b(x_1 + x_2))x_i - cx_i - d = \\ &= (a - c - b(x_1 + x_2))x_i - d, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\Pi_i(x_1, x_2) = b(x^0 - (x_1 + x_2))x_i - d, \quad i = 1, 2. \quad (11.1.1)$$

где мы ввели обозначение  $x^0 = (a - c) / b$ .

Из формулы (11.1.1) следует, что  $x^0$  — это такая величина суммарного выпуска фирм, при которой прибыль каждой фирмы отрицательна и равна постоянным издержкам, взятым с противоположным знаком, т. е. в случае, когда суммарное предложение товара на рынке равно  $x^0$ , выручка от продажи товара покрывает только переменные издержки.

Каждый из конкурентов стремится подобрать свой объем выпуска  $x_i$  так, чтобы получить максимальную прибыль.

Исследуем, как первая фирма среагирует на известный объем выпуска второй фирмы. Прибыль первой фирмы по формуле (11.1.1) равна

$$\Pi_1(x_1, x_2) = b(x^0 - (x_1 + x_2))x_1 - d. \quad (11.1.2)$$

В общем случае первая фирма считает объем выпуска конкурента  $x_2$  зависящим от  $x_1$ . Подставим  $x_2 = x_2(x_1)$  в формулу (11.1.2):

$$\Pi_1(x_1) = b(x^0 - (x_1 + x_2(x_1)))x_1 - d$$

и найдем  $x_1$  из условия максимума функции  $\Pi_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Pi_1}{dx_1} = 0, \\ \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b\left(\left(-1 - \frac{dx_2(x_1)}{dx_1}\right)x_1 + x^0 - x_1 - x_2(x_1)\right) = 0, \\ d\left(\left(-1 - \frac{dx_2(x_1)}{dx_1}\right)x_1 + x^0 - x_1 - x_2(x_1)\right) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^0 - x_2 - \left(2 + \frac{dx_2}{dx_1}\right)x_1 = 0, \\ -b\left(2 + 2\frac{dx_2}{dx_1} + x_1\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1^*(x_2) = \frac{x^0 - x_2}{2 + \frac{dx_2}{dx_1}}.\end{aligned}$$

Формула

$$x_1^*(x_2) = \frac{x^0 - x_2}{2 + \frac{dx_2}{dx_1}} \quad (11.1.3)$$

определяет *реакцию первой фирмы* на известный объем выпуска второй фирмы (не обязательно постоянный). Аналогично можно определить *реакцию второй фирмы* на действия первой:

$$x_2^*(x_1) = \frac{x^0 - x_1}{2 + \frac{dx_1}{dx_2}}. \quad (11.1.4)$$

В формулах (11.1.3)—(11.1.4)  $dx_i/dx_j$  — это *предположительная вариация*, т. е. предполагаемое ( $j$ -й фирмой) изменение выпуска  $i$ -й фирмы, связанное с увеличением выпуска конкурента на единицу.

## § 11.2. СТРАТЕГИИ ПОВЕДЕНИЯ ДУОПОЛИСТОВ

Предположим, что каждая из фирм точно знает объем выпуска своего конкурента и считает его неизменным. Тогда в формулах (7.1.3)—(7.1.4)

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{dx_2}{dx_1} = 0,$$

поэтому функция реакции первой фирмы на известный **п о с т о я н н ы й** объем выпуска второй фирмы определяется формулой

$$x_1^*(x_2) = \frac{x^0 - x_2}{2}. \quad (11.2.1)$$

Аналогично можно определить реакцию второй фирмы на действия первой при условии, что вторая фирма считает объем выпуска первой фирмы постоянным:

$$x_2^*(x_1) = \frac{x^0 - x_1}{2}. \quad (11.2.2)$$

Изобразим линии реакции фирм на действия конкурентов на рис. 11.2.1.

Будем считать, что **п р о и з в о д с т в е н н ы е** циклы обеих фирм совпадают, и рассмотрим несколько таких производственных циклов, идущих один за другим. Пусть в первом производственном цикле объемы выпуска фирм были равны соответственно  $x_1(1)$  и  $x_2(1)$ , и фирмы определяют свои выпуски в каждом следующем производственном цикле по формулам (11.2.1)—(11.2.2), считая, что объем выпуска конкурента будет таким же, как в предыдущем цикле.

Суммарный выпуск товара двумя фирмами в точке Курно равен

$$x_1^K + x_2^K = \frac{x^0}{3} + \frac{x^0}{3} = \frac{2}{3}x^0,$$

цена товара в этой точке

$$p^K = p(x_1^K + x_2^K) = a - b(x_1^K + x_2^K) = a - \frac{2}{3}bx^0,$$

прибыль первой фирмы

$$\begin{aligned}\Pi_1^K &= \Pi_1(x_1^K, x_2^K) = b(x^0 - (x_1^K + x_2^K))x_1^K - d = \\ &= b\left(x^0 - \frac{2}{3}x^0\right)\frac{x^0}{3} - d_1 = \frac{1}{9}b(x^0)^2 - d\end{aligned},$$

аналогично вычисляется прибыль второй фирмы:

$$\Pi_2^K = \Pi_2(x_1^K, x_2^K) = \frac{1}{9}b(x^0)^2 - d.$$

Предположим, что первая фирма намеренно сообщит конкуренту объем своего выпуска  $x_1$ , а конкурент, зная объем выпуска первой фирмы, выберет свой объем выпуска по формуле (11.2.2) — т. е. считая объем выпуска первой фирмы постоянным.

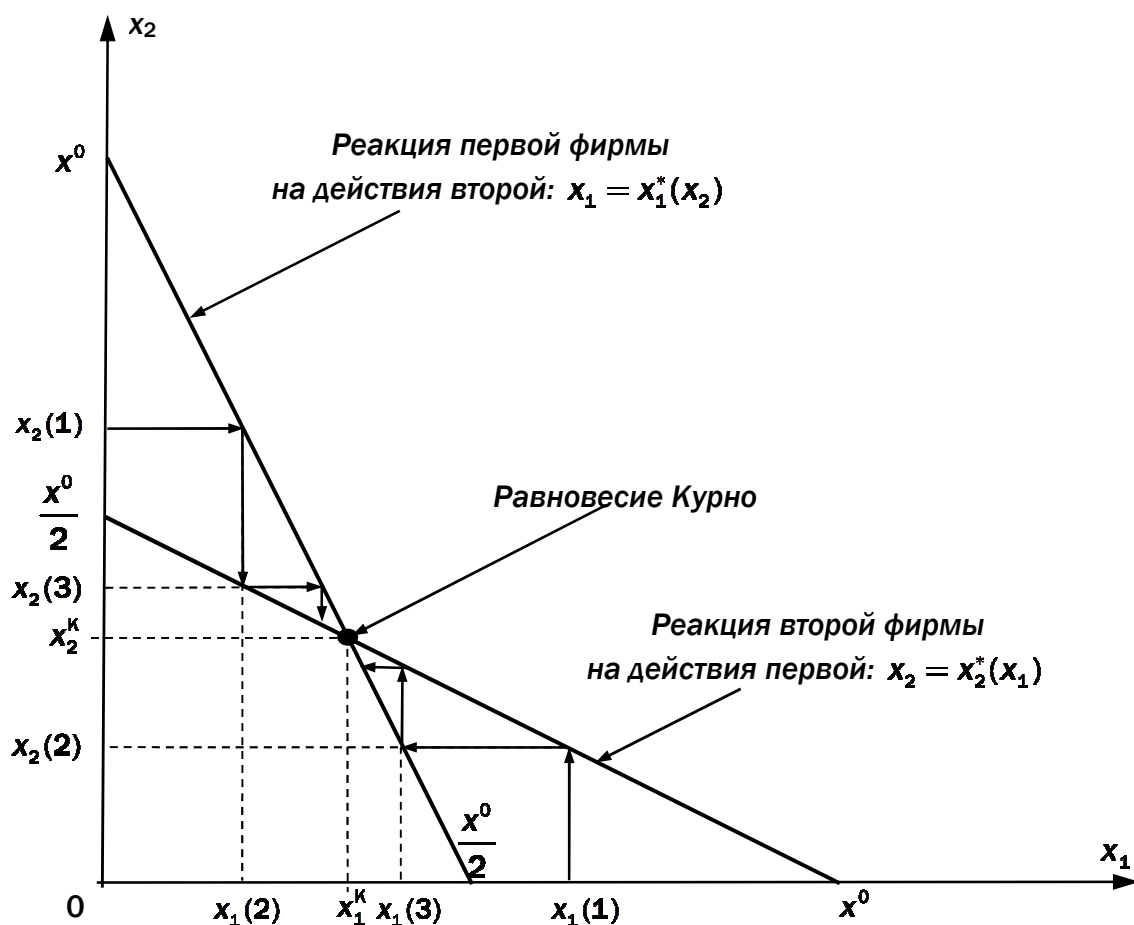


Рис. 11.2.1. «Нащупывание» дуополистами равновесия Курно

Тогда прибыль первой фирмы составит

$$\begin{aligned}\Pi_1(x_1, x_2^*(x_1)) &= b(x^0 - (x_1 + x_2^*(x_1)))x_1 - d = \\ &= b\left(x^0 - \left(x_1 + \frac{x^0 - x_1}{2}\right)\right)x_1 - d = b\left(\frac{x^0 - x_1}{2}\right)x_1 - d.\end{aligned}$$

Но прежде, чем сообщать конкуренту свой объем выпуска, первая фирма может подобрать  $x_1$  так, чтобы ее прибыль  $\Pi_1(x_1, x_2^*(x_1))$  была наибольшей. Запишем условия максимума функции  $\Pi_1(x_1, x_2^*(x_1))$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Pi_1}{dx_1} = 0, \\ \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\left(\frac{x^0}{2} - x_1\right) = 0, \\ -b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1^{\text{ПШ}} = \frac{x^0}{2}. \quad (11.2.3)$$

Такая стратегия поведения первой фирмы называется *стратегией Штакельберга*.

Если вторая фирма действительно будет действовать так, как ожидает первая [т. е. выберет в соответствии с формулой (11.2.2) объем выпуска

$$x_2^{\text{ПШ}} = \frac{x^0 - x_1^{\text{ПШ}}}{2} = \frac{x^0}{4}, \quad (11.2.4)$$

который обеспечит ей получение наибольшей возможной прибыли при условии, что предложение конкурента составляет  $x_1^{\text{ПШ}}$ ], то такая ситуация называется *равновесием Штакельберга*.

В равновесии Штакельберга суммарный объем выпуска двух фирм равен

$$x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}} = \frac{x^0}{2} + \frac{x^0}{4} = \frac{3}{4}x^0 > x_1^{\text{К}} + x_2^{\text{К}},$$

цена

$$p^{\text{ПШ}} = p(x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}}) = a - b(x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}}) = a - \frac{3}{4}bx^0 < p^{\text{К}},$$

первая фирма получает прибыль

$$\begin{aligned}\Pi_1^{\text{ПШ}} &= \Pi_1(x_1^{\text{ПШ}}, x_2^{\text{ПШ}}) = b(x^0 - (x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}}))x_1^{\text{ПШ}} - d = \\ &= b\left(x_1^0 - \frac{3x^0}{4}\right)\frac{x^0}{2} - d = \frac{1}{8}b(x^0)^2 - d > \Pi_1^{\text{К}},\end{aligned}$$

а прибыль второй фирмы в равновесии Штакельберга равна

$$\begin{aligned}\Pi_2^{\text{ПШ}} &= \Pi_2(x_1^{\text{ПШ}}, x_2^{\text{ПШ}}) = b(x^0 - (x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}}))x_2^{\text{ПШ}} - d = \\ &= b\left(x_1^0 - \frac{3x^0}{4}\right)\frac{x^0}{4} - d = \frac{1}{16}b(x^0)^2 - d < \Pi_2^{\text{К}}.\end{aligned}$$

В точке равновесия Штакельберга прибыль второй фирмы существенно меньше, чем в равновесии Курно, поэтому вторая фирма может и не захотеть «идти на поводу» у первой и получать такую маленькую прибыль: второй дуополист сам может выбрать свой выпуск согласно стратегии Штакельберга. Ситуация, когда оба производителя действуют согласно стратегии Штакельберга, называется *неравновесием Штакельберга*.

Если первая фирма считает, что конкурент, зная объем выпуска первой фирмы, выберет свой объем выпуска по формуле (11.2.2):

$$x_2 = \frac{x^0 - x_1}{2},$$

то предположительная вариация

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2},$$

и формула (11.2.3) превращается в такую:

$$x_1^*(x_2) = \frac{x^0 - x_2}{2 - 1/2} = \frac{x^0 - x_2}{3/2} = \frac{2(x^0 - x_2)}{3}. \quad (11.2.5)$$

[Естественно, решением системы, состоящей из уравнений (11.2.2) и (11.2.5), является точка равновесия Штакельберга, определяемая формулами (11.2.3)—(11.2.4); предлагаем читателю самостоятельно убедиться в этом.]

В неравновесии Штакельберга вторая фирма выбирает свой объем выпуска не по формуле (11.2.2), а по формуле

$$x_2^*(x_1) = \frac{2(x^0 - x_1)}{3}, \quad (11.2.6)$$

аналогичной (11.2.5).

Точка неравновесия Штакельберга определяется из системы линейных уравнений (11.2.5) и (11.2.6). Найдём решение этой системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2(x^0 - x_2)}{3} \\ x_2 = \frac{2(x^0 - x_1)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 2x^0 - 2x_2 \\ 3x_2 = 2x^0 - 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x^0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2x^0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x^0, \\ x_2 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\text{НШ}} = \frac{2x^0}{5}, \\ x_2^{\text{НШ}} = \frac{2x^0}{5}. \end{cases}$$

Суммарный объем выпуска в неравновесии Штакельберга

$$x_1^{\text{НШ}} + x_2^{\text{НШ}} = \frac{2x^0}{5} + \frac{2x^0}{5} = \frac{4}{5}x^0 > x_1^{\text{ПШ}} + x_2^{\text{ПШ}},$$

цена

$$p^{\text{НШ}} = p(x_1^{\text{НШ}} + x_2^{\text{НШ}}) = a - b(x_1^{\text{НШ}} + x_2^{\text{НШ}}) = a - \frac{4}{5}bx^0 < p^{\text{ПШ}},$$

а прибыли фирм равны

$$\begin{aligned} \Pi_1^{\text{НШ}} &= \Pi_1(x_1^{\text{НШ}}, x_2^{\text{НШ}}) = b(x^0 - (x_1^{\text{НШ}} + x_2^{\text{НШ}}))x_1^{\text{НШ}} - d = \\ &= b\left(x^0 - \frac{4}{5}x^0\right)\frac{2x^0}{5} - d = \frac{2}{25}b(x^0)^2 - d \end{aligned}$$

и

$$\Pi_2^{\text{НШ}} = \Pi_2(x_1^{\text{НШ}}, x_2^{\text{НШ}}) = \frac{2}{25}b(x^0)^2 - d.$$

Если два конкурента объединятся в единую фирму, то такая объединенная фирма образует на данном рынке монополию. Если  $x$  — это выпуск монополии, то цена товара будет равна

$$p(x) = a - bx,$$

и поскольку издержки описываются функцией

$$C(x) = cx + d,$$

то прибыль монополии будет вычисляться как

$$\Pi(x) = p(x)x - C(x) = (a - bx)x - cx - d = b\left(\frac{a-c}{b} - x\right)x - d = b(x^0 - x)x - d.$$

Оптимальный объем выпуска монополии определяется из условия максимума прибыли:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi}{dx} = 0, \\ \frac{d^2\Pi}{dx^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(x^0 - 2x) = 0, \\ -2b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^M = \frac{x^0}{2}.$$

При таком предложении товара (которое меньше суммарного предложения в равновесии Курно) цена будет равна

$$p(x^M) = a - bx^M = a - \frac{1}{2}bx^0 > p^K,$$

а прибыль монополии окажется равной

$$\Pi(x^M) = b(x^0 - x^M)x^M - d = b\left(x^0 - \frac{x^0}{2}\right)\frac{x^0}{2} - d = \frac{1}{4}b(x^0)^2 - d.$$

Антимонопольное законодательство может запрещать образование монополий в тех случаях, когда это невыгодно рядовым потребителям. В таких случаях фирмы могут образовать *картель*, т. е. вступить в тайный сговор, согласовав свои объемы выпуска, чтобы получать наибольшую прибыль.

В этом случае фирмы могут договориться максимизировать свою совместную прибыль

$$\begin{aligned} \Pi_{1+2}(x_1, x_2) &= \Pi_1(x_1, x_2) + \Pi_2(x_1, x_2) = \\ &= b(x^0 - (x_1 + x_2))x_1 - d + b(x^0 - (x_1 + x_2))x_2 - d = \\ &= b(x^0 - (x_1 + x_2))(x_1 + x_2) - 2d, \end{aligned}$$

а затем делить ее в определенных пропорциях.

Запишем условия максимума совместной прибыли:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{1+2}}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi_{1+2}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b(x^0 - 2(x_1 + x_2)) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{x^0}{2}.$$

Таким образом, максимум совместной прибыли достигается на любой точке отрезка прямой, определяемой уравнением

$$x_1 + x_2 = \frac{x^0}{2} \quad \text{при} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Рассмотрим теперь задачу максимизации совместной прибыли с другого ракурса.

*Изопрофитой*  $i$ -й фирмы называется линия, на которой прибыль этой фирмы постоянна (т. е. линия уровня прибыли  $i$ -й фирмы).

Уравнение изопрофиты первой фирмы имеет вид

$$\Pi_1(x_1, x_2) = \pi_1^0 = \text{const}$$

или

$$b(x^0 - (x_1 + x_2))x_1 - d = \pi_1^0.$$

Вначале рассмотрим случай  $\pi_1^0 = -d$ :

$$\Pi_1(x_1, x_2) = -d \Leftrightarrow b(x^0 - (x_1 + x_2))x_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 + x_2 = x^0 \quad \text{или} \quad x_1 = 0.$$

Таким образом, значению прибыли  $\pi_1^0 = -d$  соответствует изопрофита

$$\left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 = 0, x_2 \in [0, x^0]) \cup (x_1 \in [0, x^0], x_2 = x^0 - x_1) \right\}.$$

При  $\pi_1^0 > -d$  получаем

$$x_2 = x^0 - x_1 - \frac{\pi_1^0 + d}{bx_1}. \quad (11.2.7)$$

Изобразим несколько изопрофит первой фирмы, рассчитанных по формуле (11.2.7) при различных значениях прибыли  $\pi_1^0$ , на рис. 11.2.2.

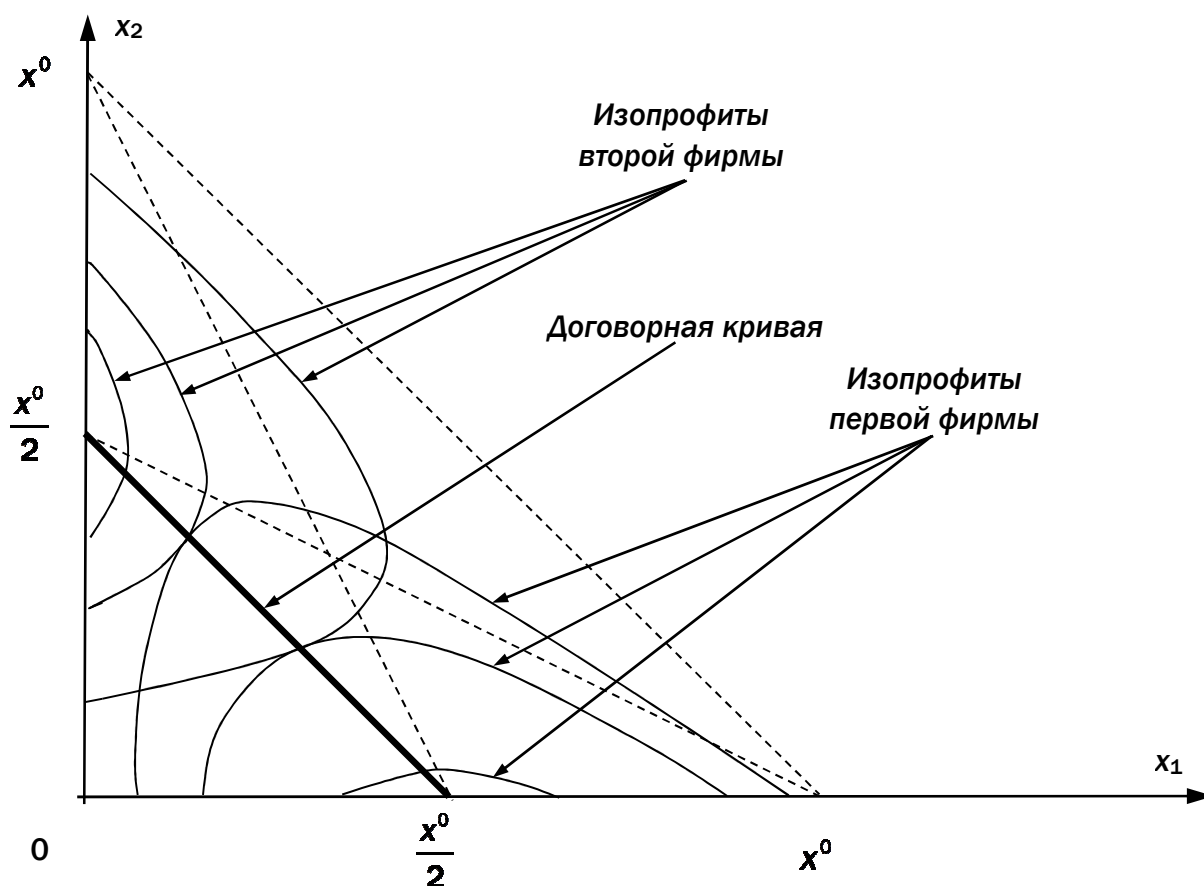
Аналогичным образом можно составить уравнение изопрофиты второй фирмы

$$\Pi_2(x_1, x_2) = b(x^0 - (x_1 + x_2))x_2 - d = \pi_2^0 = \text{const},$$

выразить из этого уравнения (при  $\pi_2^0 > -d$ )

$$x_1 = x^0 - x_2 - \frac{\pi_2^0 + d}{bx_2} \quad (11.2.8)$$

и изобразить на рис. 11.2.2 несколько изопрофит второй фирмы, рассчитанных по формуле (11.2.8) при различных значениях прибыли  $\pi_2^0$ .



**Рис. 11.2.2.** Договорная кривая как множество точек касания изопрофит

Точки, в которых ни одна из фирм не может добиться увеличения своей прибыли без уменьшения прибыли конкурента, являются оптимальными по Парето. С геометрической точки зрения множество этих точек образуют *договорную кривую*, образованную точками касания изопрофит двух фирм (она отмечена жирной линией на рис. 11.2.2).

Условие касания изопрофит (т. е. линий уровня прибыли) эквивалентно коллинеарности градиентов:

$$\text{grad } \Pi_1 \parallel \text{grad } \Pi_2$$

или

$$\frac{\partial \Pi_1 / \partial x_1}{\partial \Pi_1 / \partial x_2} = \frac{\partial \Pi_2 / \partial x_1}{\partial \Pi_2 / \partial x_2}.$$

Подставив сюда выражения частных производных:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = b(x^0 - 2x_1 - x_2), \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} = -bx_1, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1} = -bx_2, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = b(x^0 - x_1 - 2x_2),$$

получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{b(x^0 - 2x_1 - x_2)}{-bx_1} &= \frac{-bx_2}{b(x^0 - x_1 - 2x_2)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^0 - 2x_1 - x_2)(x^0 - x_1 - 2x_2) &= x_1x_2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^0 - 2x_1 - 2x_2)(x^0 - x_1 - 2x_2) + x_2(x^0 - x_1 - 2x_2) - x_1x_2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^0 - 2x_1 - 2x_2)(x^0 - x_1 - 2x_2) + x_2(x^0 - 2x_1 - 2x_2) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^0 - 2x_1 - 2x_2)(x^0 - x_1 - x_2) &= 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку суммарный выпуск  $x_1 + x_2$  всегда меньше  $x^0$  [а иначе обе фирмы будут получать отрицательную прибыль ( $-d$ )], из последней формулы следует, что договорная кривая определяется из условия

$$x^0 - 2x_1 - 2x_2 = 0$$

или

$$x_1 + x_2 = \frac{x^0}{2}.$$

Заметим, что ранее это же условие определяло максимум совместной прибыли фирм в картеле, т. е. максимум совместной прибыли достигается на договорной кривой! Эта кривая представляет собой множество точек, и какую из них выбрать, фирмы могут решить только в процессе переговоров.

Сведем в табл. 11.2.1 все результаты, полученные при исследовании различных вариантов взаимодействия двух фирм на рынке одного товара.

**Таблица 11.2.1**

Рыночная модель	$x_1$	$x_2$	$x_1 + x_2$	$p$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_1 + \Pi_2$
<i>Картель</i>	?	?	$\frac{x^0}{2}$	$a - \frac{1}{2}bx^0$	?	?	$\frac{1}{4}b(x^0)^2 - 2d$
<i>Равновесие Курно</i>	$\frac{x^0}{3}$	$\frac{x^0}{3}$	$\frac{2x^0}{3}$	$a - \frac{2}{3}bx^0$	$\frac{1}{9}b(x^0)^2 - d$	$\frac{1}{9}b(x^0)^2 - d$	$\frac{2}{9}b(x^0)^2 - 2d$
<i>Равновесие Штакельберга</i>	$\frac{x^0}{2}$	$\frac{x^0}{4}$	$\frac{3x^0}{4}$	$a - \frac{3}{4}bx^0$	$\frac{1}{8}b(x^0)^2 - d$	$\frac{1}{16}b(x^0)^2 - d$	$\frac{3}{16}b(x^0)^2 - 2d$
<i>Неравновесие Штакельберга</i>	$\frac{2x^0}{5}$	$\frac{2x^0}{5}$	$\frac{4x^0}{5}$	$a - \frac{4}{5}bx^0$	$\frac{2}{25}b(x^0)^2 - d$	$\frac{2}{25}b(x^0)^2 - d$	$\frac{4}{25}b(x^0)^2 - 2d$

Вопросительные знаки в строке, соответствующей картелю, означают, что конкретные результаты зависят от того, как фирмы договорятся между собой.

С точки зрения покупателя, очевидно наиболее предпочтительным взаимодействием дуополистов является неравновесие Штакельберга, а наихудшей ситуацией является образование картеля.

Исследуем **устойчивость рассмотренных состояний равновесия**. Напомним, что пара стратегий игроков образует **равновесие Нэша**, если никому из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии, если конкурент от своей стратегии не отклоняется.

Согласно формуле (11.1.1),

$$\Pi_i(x_1, x_2) = b(x^0 - (x_1 + x_2))x_i - d, \quad i = 1, 2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1}{dx_1} &= b \left( \left( -1 - \frac{dx_2(x_1)}{dx_1} \right) x_1 + x^0 - x_1 - x_2(x_1) \right), \\ \frac{d\Pi_2}{dx_2} &= b \left( \left( -1 - \frac{dx_1(x_2)}{dx_2} \right) x_2 + x^0 - x_2 - x_1(x_2) \right), \\ \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} &= b \frac{d \left( \left( -1 - \frac{dx_2(x_1)}{dx_1} \right) x_1 + x^0 - x_1 - x_2(x_1) \right)}{dx_1}, \\ \frac{d^2\Pi_2}{dx_2^2} &= b \frac{d \left( \left( -1 - \frac{dx_1(x_2)}{dx_2} \right) x_2 + x^0 - x_2 - x_1(x_2) \right)}{dx_2}. \end{aligned}$$

Предположим, что вторая фирма не изменяет своей стратегии, т. е.  $x_2 = \text{const}$ , тогда  $dx_2(x_1)/dx_1 = 0$  и

$$\left. \frac{d\Pi_1}{dx_1} \right|_{x_2=\text{const}} = b(x^0 - 2x_1 - x_2), \quad \left. \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} \right|_{x_2=\text{const}} = -2b < 0.$$

Аналогично, если первая фирма не изменяет свою стратегию, то

$$\left. \frac{d\Pi_2}{dx_2} \right|_{x_1=\text{const}} = b(x^0 - x_1 - 2x_2), \quad \left. \frac{d^2\Pi_2}{dx_2^2} \right|_{x_1=\text{const}} = -2b < 0.$$

В точке **равновесия Курно**  $x_1 = x_2 = x^0/3$ , поэтому

$$\left. \frac{d\Pi_1}{dx_1} \right|_{\substack{x_1=x_1^K, \\ x_2=x_2^K=\text{const}}} = b \left( x^0 - 2 \frac{x^0}{3} - \frac{x^0}{3} \right) = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_1^K, \\ x_2=x_2^K=\text{const}}} = -2b < 0,$$

$$\left. \frac{d\Pi_2}{dx_2} \right|_{\substack{x_2=x_2^K, \\ x_1=x_1^K=\text{const}}} = b \left( x^0 - \frac{x^0}{3} - 2 \frac{x^0}{3} \right) = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_2}{dx_2^2} \right|_{\substack{x_2=x_2^K, \\ x_1=x_1^K=\text{const}}} = -2b < 0,$$

поэтому равновесие Курно является и равновесием Нэша.

В точке равновесия Штакельберга  $x_1 = x^0/2$ ,  $x_2 = x^0/4$ , значит,

$$\left. \frac{d\Pi_1}{dx_1} \right|_{\substack{x_1=x_1^K, \\ x_2=x_2^K=\text{const}}} = b \left( x^0 - 2 \frac{x^0}{2} - \frac{x^0}{4} \right) = -b \frac{x^0}{4} < 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_1^K, \\ x_2=x_2^K=\text{const}}} = -2b < 0,$$

$$\left. \frac{d\Pi_2}{dx_2} \right|_{\substack{x_2=x_2^K, \\ x_1=x_1^K=\text{const}}} = b \left( x^0 - \frac{x^0}{2} - 2 \frac{x^0}{4} \right) = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_2}{dx_2^2} \right|_{\substack{x_2=x_2^K, \\ x_1=x_1^K=\text{const}}} = -2b < 0,$$

т. е. равновесие Штакельберга не является равновесием Нэша: ведомой фирме невыгодно изменять свою стратегию при условии, что лидер не меняет своей стратегии.

В точке неравновесия Штакельберга  $x_1 = x_2 = x^0/2$ , поэтому

$$\left. \frac{d\Pi_1}{dx_1} \right|_{\substack{x_1=x_1^{\text{HHH}}, \\ x_2=x_2^{\text{HHH}}=\text{const}}} = b \left( x^0 - 2 \frac{2x^0}{5} - \frac{2x^0}{5} \right) = -b \frac{x^0}{5} < 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_1}{dx_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_1^{\text{HHH}}, \\ x_2=x_2^{\text{HHH}}=\text{const}}} = -2b < 0,$$

$$\left. \frac{d\Pi_2}{dx_2} \right|_{\substack{x_2=x_2^{\text{HHH}}, \\ x_1=x_1^{\text{HHH}}=\text{const}}} = b \left( x^0 - \frac{2x^0}{5} - 2 \frac{2x^0}{5} \right) = -b \frac{x^0}{5} < 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi_2}{dx_2^2} \right|_{\substack{x_2=x_2^{\text{HHH}}, \\ x_1=x_1^{\text{HHH}}=\text{const}}} = -2b < 0,$$

и равновесие Штакельберга не является равновесием Нэша: обоим игрокам выгодно уменьшить выпуск при условии, что конкурент не будет менять стратегии.

Аналогично можно показать, что картельные соглашения также неравновесны по Нэшу. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

### § 11.3. МОДЕЛИ НЕСОВЕРШЕННОЙ И СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Предположения модели Курно о том, что фирмы принимают решения об объеме выпуска, считая, что изменения в их выпуске не повлияют на объем выпуска конкурента, в случае дуополии весьма наивны.

Напротив, в случае конкуренции, когда участников рынка много, действительно можно считать, что действия одного из них не повлияют на действия других.

Обобщение равновесия Курно на случай  $N$  участников рынка таково:

$$x_i^K = \frac{x^0}{N+1}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (11.3.1)$$

$$p^K = a - \frac{N}{N+1}bx^0, \quad (11.3.2)$$

$$x_1^K + x_2^K + \dots + x_N^K = \frac{N}{N+1}x^0, \quad (11.3.3)$$

$$\Pi_i(x_1^K, x_2^K, \dots, x_N^K) = \frac{1}{(N+1)^2}b(x^0)^2 - d, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (11.3.4)$$

Предлагаем читателю самостоятельно вывести эти формулы.

В случае совершенной конкуренции  $N \rightarrow \infty$ , и тогда предельным переходом в формулах (11.3.1)—(11.3.4) получаем, что индивидуальные объемы выпуска конкурентов

$$x_i^K \rightarrow 0,$$

цена товара

$$p^K \rightarrow a - bx^0 = c$$

равна предельным издержкам [поскольку  $x^0 = (a - c) / b$ ], при этом суммарный выпуск всех конкурентов

$$x_1^K + x_2^K + \dots + x_N^K \rightarrow x^0,$$

а прибыль каждого из конкурентов

$$\Pi_i(x_1^K, x_2^K, \dots, x_N^K) \rightarrow -d, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Каждая фирма в этом случае производит настолько маленькое количество продукции, что ее выпуск никак не влияет на цену; равновесная цена равна при этом предельным издержкам!

## **§ 11.4. МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ НА РЫНКЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

В этом параграфе излагаются результаты 2009 г., полученные автором при теоретико-игровом моделировании рынка информационных технологий — одного из важнейших рынков экономики знаний. имеющего ряд существенных особенностей. Самой главной особенностью является то, что товары этого рынка представляют собой две связанные компоненты, одна из которых (аппаратное обеспечение) является материальным товаром, другая (программное обеспечение) представляет собой интеллектуальный товар.

При этом программное обеспечение, будучи интеллектуальным товаром, имеет три особенности, определяющие его производство и распространение:

- нематериальность (т. е. их физическая неосязаемость, которая влечет за собой сложность оценки себестоимости разработки);
- идемпотентность (которая понимается в алгебраическом смысле: два одинаковых интеллектуальных товара полностью эквивалентны одному такому товару, т. е. знание, будучи однажды создано, может, не теряя своих свойств, использоваться многократно одним или многими потребителями);
- наличие (или отсутствие) института защиты авторских прав, призванного обеспечить гарантии того, что интеллектуальный товар можно купить только у его правообладателя.

Рассмотрим вначале **модель взаимодействия монопольного производителя аппаратных средств с монопольным разработчиком элементарного коммерческого программного обеспечения.**

Производителя аппаратного обеспечения будем обозначать индексом  $I$ , имея в виду *Intel*, а разработчика коммерческой операционной системы — индексом  $W$  — *Windows*. Данные индексы на самом деле условны: все результаты справедливы и для любых других взаимодействующих аппаратных и программных платформ.

Итак, предположим, что оба производителя — монополисты.

Будем считать, что аппаратное обеспечение с операционной системой представляют собой комбинированный продукт, и ни один потребитель не приобретает компьютер без операционной системы или операционную систему отдельно от компьютера.

Сборщики компьютеров образуют рынок совершенной конкуренции, и не могут, в отличие от производителей процессоров и коммерческой операционной системы, влиять на цену комбинированного продукта (компьютера с операционной системой).

Пусть

$p_I$	— цена аппаратного обеспечения (микропроцессора);
$p_W$	— цена коммерческой операционной системы;
$q_{I+W}(p_I + p_W)$	— функция спроса на компьютеры (с коммерческой операционной системой);
$e_I = f_I + v_I q_{I+W}$	— полные издержки производителя аппаратного обеспечения;
$f_I$	— постоянные издержки производителя аппаратного обеспечения;
$v_I$	— переменные издержки производителя аппаратного обеспечения;
$e_W = f_W + v_W q_{I+W}$	— полные издержки производителя коммерческой операционной системы;
$f_W$	— постоянные издержки производителя коммерческой операционной системы;
$v_W$	— переменные издержки производителя коммерческой операционной системы.

Цены аппаратного обеспечения и программных продуктов складываются из постоянных издержек, прибыли производителя, переменных издержек и издержек по обеспечению технической поддержки.

Постоянные издержки и издержки по обеспечению технической поддержки у производителей программного обеспечения довольно невелики, а переменные издержки и вовсе близки к нулю (записать копию программного продукта на компакт-диск не стоит практически ничего, а выложить очередную версию в интернет — и того дешевле).

Постоянные издержки у производителей аппаратного обеспечения существенно больше, чем у разработчиков программных продуктов, а переменные издержки (так же, как и у производителей программного обеспечения) стремятся к нулю (поскольку для производства микросхем необходимо строительство высокотехнологичного завода стоимостью в несколько млрд. долл., но затем производство одного микропроцессора обходится дешевле 1 долл.). Издержки по обеспечению технической поддержки у производителей аппаратного обеспечения приблизительно такие же, как и у разработчиков программных продуктов.

Поэтому можно считать, что производители аппаратного обеспечения и коммерческого программного обеспечения при принятии решений об установлении цен на свои продукты руководствуются целью максимизации выручки, а не прибыли.

Также естественно предположить, что цены всех продуктов существенно превышают переменные издержки по производству этих продуктов.

Задача производителя аппаратных средств состоит в определении такой цены продукта  $p_I$ , которая обеспечит максимум прибыли:

$$\pi_I = (p_I - v_I) q_{I+W} (p_I + p_W) - f_I \rightarrow \max. \quad (11.4.1)$$

Задача, стоящая перед производителем коммерческой операционной системы, аналогична: установить такую цену продукта  $p_W$ , при которой прибыль будет достигать максимального значения:

$$\pi_W = (p_W - v_W) q_{I+W} (p_I + p_W) - f_W \rightarrow \max. \quad (11.4.2)$$

**ТЕОРЕМА.** На рынке, где производство аппаратного обеспечения и разработка операционных систем монополизированы, цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене аппаратного обеспечения, а сумма прибыли и постоянных издержек у разработчика операционной системы такая же, как и у производителя аппаратного обеспечения.

**Доказательство.** Запишем условия максимума первого порядка в задачах (11.4.1), (11.4.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_I}{\partial p_I} = q_{I+W}(p_I + p_W) + (p_I - v_I) \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{d(p_I + p_W)} = 0; \\ \frac{\partial \pi_W}{\partial p_W} = q_{I+W}(p_I + p_W) + (p_W - v_W) \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{d(p_I + p_W)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (11.4.3)$$

$$\Leftrightarrow p_I - v_I = p_W - v_W \Leftrightarrow \quad (11.4.4)$$

$$\Leftrightarrow \pi_I + f_I = \pi_W + f_W. \quad (11.4.5)$$

Если считать, что на рассматриваемом рынке

$$v_W < v_I \ll 1, \quad f_W \ll f_I,$$

то условие (11.4.4) означает, что цена лицензии на операционную систему должна быть равна цене микропроцессора, а условие (11.4.5) — что прибыль без учета постоянных издержек делится поровну между разработчиком операционной системы и производителем аппаратного обеспечения.

Теорема доказана.  $\square$

Исследуем теперь **эластичность спроса на программное обеспечение**. Перепишем второе из условий (11.4.3) в виде

$$1 + \frac{p_W - v_W}{q_{I+W}(p_I + p_W)} \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{d(p_I + p_W)} = 0. \quad (11.4.6)$$

Будем считать, что производители аппаратного обеспечения не могут влиять на цену своего продукта  $p_I$ . Тогда

$$\frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{d(p_I + p_W)} = \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{dp_W}.$$

Если определить эластичность спроса на комбинированный продукт по цене как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{I+W} &= - \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{d(p_I + p_W)} \bigg/ \frac{p_I + p_W}{q_{I+W}(p_I + p_W)} = \\ &= - \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W)}{dp_W} \bigg/ \frac{p_I + p_W}{q_{I+W}(p_I + p_W)}, \end{aligned}$$

то условие (11.4.6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{p_W - v_W}{p_I + p_W} \frac{dq_{I+W}(p_I + p_W) / dp_W}{q_{I+W}(p_I + p_W) / (p_I + p_W)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 = \frac{p_W - v_W}{p_I + p_W} \varepsilon_{I+W} &\Leftrightarrow \varepsilon_{I+W} = \frac{p_I + p_W}{p_W - v_W}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 11.4.1.** Требуется найти эластичность спроса на рабочие станции, если цена микропроцессора равна  $p_I = 2500$  руб., цена лицензии на операционную систему также равна  $p_W = 2500$  руб.

**Решение.** Подставляя в правую часть формулы

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{p_I + p_W}{p_W - v_W}$$

нулевые переменные издержки производителя операционной системы  $v_W = 0$ , цену микропроцессора  $p_I = 2500$  руб. и цену лицензии на операционную систему  $p_W = 2500$  руб., находим эластичность спроса на такие рабочие станции:

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{p_I + p_W}{p_W - v_W} = \frac{2500 + 2500}{2500 - 0} = 2. \quad \square$$

На самом деле такое высокое значение не означает, что спрос настолько эластичен, скорее, дело в занижении производителем цены лицензии на операционную систему, которое связано, в частности, с получением дополнительных доходов от продажи прикладного программного обеспечения пользователям операционной системы.

Предположим, что монопольный производитель коммерческого системного программного обеспечения получает прибыль также и от комплементарных продуктов (например, *Microsoft* — производитель операционной системы *Microsoft Windows* — получает прибыль также и от продажи лицензий на офисный пакет *Microsoft Office*).

Комплементарный продукт покупают не все пользователи операционной системы, а их доля  $\lambda_o \leq 1$ .

Пусть

$p_o$  — цена комплементарного продукта (индекс  $O$  означает *Microsoft Office*);

$f_o$  — постоянные издержки по производству комплементарного продукта;

$v_o$  — переменные издержки по производству комплементарного продукта.

Тогда задача монопольного производителя коммерческого программного обеспечения принимает следующий вид:

$$\pi_W = (p_W - v_W + \lambda_o (p_o - v_o)) q_{I+W} (p_I + p_W) - f_W - f_o \rightarrow \max.$$

Условие максимума первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_W}{\partial p_W} &= q_{I+W} (p_I + p_W) + \\ &+ (p_W - v_W + \lambda_o (p_o - v_o)) \frac{dq_{I+W} (p_I + p_W)}{dp_W} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{p_W - v_W + \lambda_o (p_o - v_o)}{p_I + p_W} \frac{dq_{I+W} (p_I + p_W) / dp_W}{q_{I+W} (p_I + p_W) / (p_I + p_W)} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{p_W - v_W + \lambda_O(p_O - v_O)}{p_I + p_W} \varepsilon_{I+W} \Leftrightarrow \varepsilon_{I+W} = \frac{p_I + p_W}{p_W - v_W + \lambda_O(p_O - v_O)}.$$

**ПРИМЕР 11.4.2.** Требуется найти эластичность спроса на рабочие станции, если цена микропроцессора равна  $p_I = 2500$  руб., цена лицензии на операционную систему также равна  $p_W = 2500$  руб., цена лицензии на офисный пакет равна  $p_O = 13\,500$  руб., при этом четверть всех пользователей операционной системы приобретает офисный пакет

**Решение.** Подставляя в правую часть формулы

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{p_I + p_W}{p_W - v_W + \lambda_O(p_O - v_O)}$$

долю  $\lambda_O = 0,25$  пользователей, приобретающих офисный пакет, нулевые переменные издержки производителя операционной системы и офисного пакета  $v_W = v_O = 0$ , цену микропроцессора  $p_I = 2500$  руб., цену лицензии на операционную систему  $p_W = 2500$  руб. и цену лицензии на офисный пакет  $p_O = 13\,500$  руб., находим эластичность:

$$\varepsilon_{I+W} = \frac{2500 + 2500}{2500 - 0 + 0,25(13\,500 - 0)} = 0,85. \quad \square$$

Данный результат свидетельствует о высокой эластичности спроса на компьютеры в существующем диапазоне цен лицензий на программное обеспечение.

Перейдем к рассмотрению **модели взаимодействия двух конкурирующих поставщиков операционных систем (*Microsoft* и *Linux*) с монопольным производителем аппаратного обеспечения (*Intel*)**.

Будем теперь считать, что *Intel* (нижний индекс  $I$ ) занимает монопольное положение на рынке аппаратного обеспечения (микропроцессоров), а на рынке операционных систем конкурируют коммерческий продукт *Microsoft Windows* (нижний индекс  $W$ ) и некоммерческий продукт *Linux* (нижний индекс  $L$ ).

Таким образом, пользователь может принять одно из двух решений:

- либо приобрести компьютер с предустановленной коммерческой операционной системой;
- либо приобрести компьютер с предустановленной некоммерческой операционной системой;

Хотя лицензия на *Windows* имеет положительную цену, а *Linux* распространяется свободно, оба продукта сосуществуют на рынке. Это говорит о том, что потребительская ценность *Windows* больше потребительской ценности *Linux*.

Рациональный пользователь приобретет комбинированный продукт (компьютер с операционной системой) тогда и только тогда, когда потребительская ценность продукта для данного пользователя превышает его цену.

Введем обозначения:

$q_{\max}$	— емкость рынка компьютеров;
$\alpha_I$	— максимально возможная цена компьютера с некоммерческой операционной системой;
$\alpha_{I+W}$	— максимально возможная цена компьютера с коммерческой операционной системой ( $\alpha_{I+W} > \alpha_I$ );
$p_I$	— цена аппаратного обеспечения (микропроцессора);
$p_W$	— цена лицензии на коммерческую операционную систему;
$q_W$	— спрос на коммерческую операционную систему;
$q_L$	— спрос на некоммерческую операционную систему;
$q_I = q_W + q_L$	— спрос на компьютеры;
$f_I$	— постоянные издержки производителя аппаратного обеспечения;
$f_W$	— постоянные издержки разработчика коммерческой операционной системы;
$v_I$	— переменные издержки производителя аппаратного обеспечения;
$v_W$	— переменные издержки разработчика коммерческой операционной системы;
$\pi_I = q_I (p_I - v_I) - f_I$	— прибыль производителя аппаратного обеспечения;
$\pi_W = q_W (p_W - v_W) - f_W$	— прибыль разработчика коммерческой операционной системы.

Будем использовать линейные функции спроса:

$$q_{I+W}(p) = q_{\max} \left( 1 - \frac{p}{\alpha_{I+W}} \right) —$$

на компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Windows*;

$$q_{I+L}(p) = q_{\max} \left( 1 - \frac{p}{\alpha_I} \right) —$$

на компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Linux*.

Если *Intel* установит цену микропроцессора равной  $p_I$ , а *Microsoft* установит цену лицензии на *Windows* в размере  $p_W$ , то спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Windows* составит

$$q_W = q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I + p_W}{\alpha_I} \right), \quad (11.4.7)$$

а спрос на персональные компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционной системой *Linux* —

$$q_L = q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I}{\alpha_I} \right) - q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I + p_W}{\alpha_I} \right) = q_{\max} \frac{p_W}{\alpha_I}. \quad (11.4.8)$$

Это означает, что пользователь приобретет композитный продукт (персональный компьютер с одной из операционных систем) тогда и только тогда, когда потребительская ценность продукта для данного пользователя превысит его цену (рис. 11.4.1).

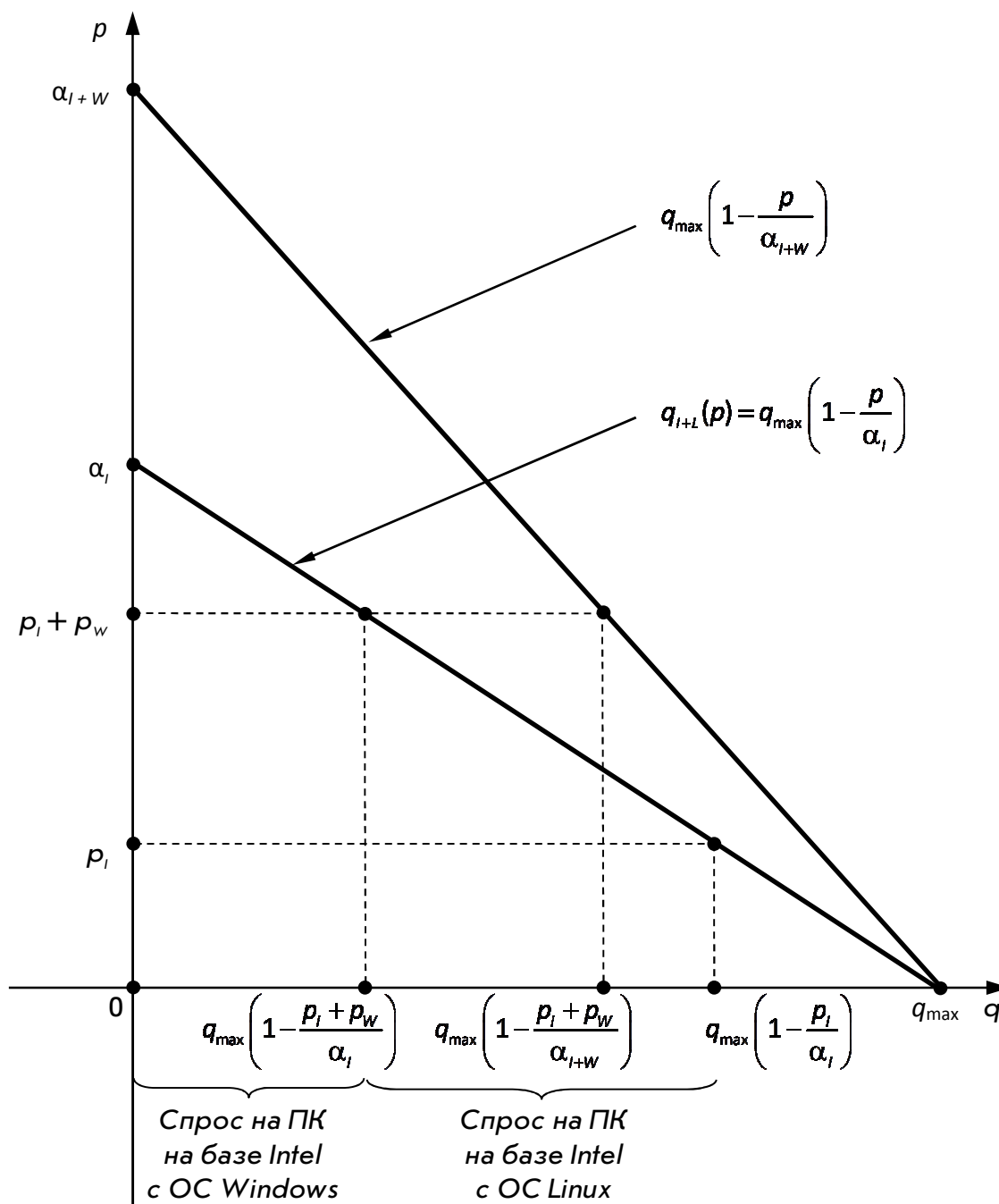


Рис. 11.4.1. Функции спроса на компьютеры на базе процессоров *Intel* с операционными системами *Windows* и *Linux*

Суммарный спрос на аппаратное обеспечение будет равен

$$q_I = q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I + p_W}{\alpha_I} \right) + q_{\max} \frac{p_W}{\alpha_I} = q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I}{\alpha_I} \right). \quad (11.4.9)$$

Выражения (11.4.7)—(11.4.9) позволяют сформулировать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Реализованный спрос на компьютеры с некоммерческой операционной системой зависит только от цены коммерческого конкурента (но не от цены аппаратного обеспечения); спрос на аппаратное обеспечение зависит только от его цены (но не от цены коммерческой операционной системы); спрос на коммерческую операционную систему зависит и от цены лицензии на этот продукт, и от цены аппаратного обеспечения.*

Задача, которая стоит перед производителем аппаратного обеспечения, состоит в установлении такой его цены  $p_I$ , которая обеспечит максимум прибыли

$$\begin{aligned} \pi_I &= q_I (p_I - v_I) - f_I = \\ &= q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I}{\alpha_I} \right) (p_I - v_I) - f_I \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

Аналогично, разработчик коммерческой операционной системы также стремится максимизировать свою прибыль

$$\begin{aligned} \pi_W &= q_W (p_W - v_W) - f_W = \\ &= q_{\max} \left( 1 - \frac{p_I + p_W}{\alpha_I} \right) (p_W - v_W) - f_W \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (11.4.11)$$

путем выбора оптимальной цены лицензии  $p_W$ .

**ТЕОРЕМА.** *Оптимальная цена аппаратного обеспечения, равная*

$$p_I^* = \frac{\alpha_I + v_I}{2} \quad (11.4.12)$$

*обеспечивает его производителю максимальную прибыль*

$$\pi_I^* = q_{\max} \frac{(\alpha_I - v_I)^2}{4\alpha_I} - f_I; \quad (11.4.13)$$

*оптимальная цена лицензии на операционную систему*

$$p_W^* = \frac{\alpha_I + 2v_W - v_I}{4} \quad (11.4.14)$$

*обеспечивает ее разработчику максимальную прибыль*

$$\pi_W^* = q_{\max} \frac{(\alpha_I - 2v_W - v_I)^2}{16\alpha_I} - f_W; \quad (11.4.15)$$

при этом

$$\frac{dp_w^*}{dp_I^*} = -\frac{1}{2}, \quad (11.4.16)$$

а прибыль производителя аппаратного обеспечения превышает прибыль разработчика операционной системы тогда и только тогда, когда

$$q_{\max} (3\alpha_I - 3v_I - 2v_W)(\alpha_I - v_I + 2v_W) > 16\alpha_I(f_I - f_W). \quad (11.4.17)$$

**Доказательство.** Условие максимума первого порядка в задаче (11.4.10) дает оптимальное значение цены аппаратного обеспечения

$$\frac{d\pi_I}{dp_I} = 0 \Leftrightarrow q_{\max} \frac{\alpha_I - 2p_I + v_I}{\alpha_I} = 0 \Leftrightarrow p_I^* = \frac{\alpha_I + v_I}{2}.$$

При этом (в соответствии с доказанной теоремой) производитель аппаратного обеспечения устанавливает цену без оглядки на разработчика коммерческой операционной системы.

После того, как производитель аппаратного обеспечения установил цену на свой продукт, разработчик коммерческой операционной системы может принять решение о цене лицензии. Записав условие максимума первого порядка в задаче (11.4.11), получим функцию реакции

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\pi_W}{dp_W} \right|_{p_I=p_I^*=\text{const}} &= 0 \Leftrightarrow q_{\max} \left( \frac{\alpha_I + v_W - p_I^* - 2p_W}{\alpha_I} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_W^* = \frac{\alpha_I + v_W - p_I^*}{2}. \end{aligned} \quad (11.4.18)$$

Подставляя в функцию реакции уже известную цену аппаратного обеспечения  $p_I^*$ , получаем формулу (11.4.12)

Выражения для прибыли (11.4.13), (11.4.15) получаются простой подстановкой оптимальных цен в функции прибыли участников рынка.

Дифференцируя в формуле (11.4.18)  $p_W^*$  по  $p_I^*$ , получаем формулу (11.4.16).

Далее,

$$\begin{aligned} \pi^* > \pi_W^* &\Leftrightarrow q_{\max} \frac{(\alpha_I - v_I)^2}{4\alpha_I} - f_I > q_{\max} \frac{(\alpha_I - 2v_W - v_I)^2}{16\alpha_I} - f_W \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow q_{\max} \frac{4(\alpha_I - v_I)^2 - (\alpha_I - 2v_W - v_I)^2}{16\alpha_I} > f_I - f_W \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow q_{\max} (3\alpha_I - 3v_I - 2v_W)(\alpha_I - v_I + 2v_W) > 16\alpha_I(f_I - f_W). \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.  $\square$

Заметим, что согласно формуле (11.4.16) увеличение оптимальной цены аппаратного обеспечения на 1 ден. ед. сопровождается уменьшением

оптимальной цены программного обеспечения только на 0,5 ден. ед., а условие (11.4.17) на практике не выполняется ввиду существенно больших постоянных издержек производителя аппаратного обеспечения по сравнению с разработчиком коммерческого программного обеспечения.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Две фирмы производят один и тот же продукт. Первая фирма тратит на производство единицы продукта 10 единиц труда и 10 единиц капитала, вторая — 10 единиц труда и 20 единиц капитала. Цена единицы труда равна  $w$ , а цена единицы капитала равна  $r$ . Рыночная цена продукта зависит от суммарного выпуска:  $p(x_1 + x_2) = 100 - (x_1 + x_2)$ . Найдите объемы выпусков и значения прибыли, соответствующие равновесию Курно, прокомментируйте тот факт, что объем выпуска и прибыль первой фирмы не зависят от цены капитала (в отличие от второй фирмы).
2. Три фирмы производят один и тот же интеллектуальный товар, так что предельные издержки фирм близки к нулю. Рыночная цена продукта зависит от суммарного предложения:  $p(x_1 + x_2) = 120 - (x_1 + x_2)$ . Найдите объемы выпусков и значения прибыли, соответствующие равновесию Курно.
3. Найдите равновесие в модели Бертрона, в которой каждая из двух фирм  $i = 1, 2$ , производящих один товар, назначает свою цену  $p_i$ , а покупатели покупают весь товар у той фирмы, которая назначит меньшую цену, и совсем не покупают у другой фирмы, назначившей более высокую цену (если обе цены совпадут, то спрос распределяется между фирмами поровну). Себестоимость товара у обеих фирм одинакова и равна  $c$  руб. Образуют ли найденные стратегии фирм равновесие Нэша?
4. Докажите, что точка равновесия Штакельберга (в случае, когда лидером является первая фирма) соответствует точке касания одной из изопрофит первой фирмы и линии реакции второй фирмы.
5. Докажите, что картельные соглашения двух фирм при любом распределении объемов выпуска не являются равновесиями Нэша.
6. Докажите, что точка равновесия Курно на рынке  $N$  фирм определяется формулами (11.3.1)—(11.3.4).

## ГЛАВА 12. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### § 12.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории оптимального управления рассматривается поведение некоторой системы на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_1$ . Состояние системы в каждый момент времени характеризуется вектором *фазовых переменных*

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

причем каждая из фазовых переменных представляет собой некоторую непрерывную функцию времени.

*Начальное и конечное состояния системы считаются известными:*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1.$$

Поведение системы зависит от вектора *управляющих переменных* или *управлений*

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{pmatrix},$$

на который накладывается ограничение кусочной непрерывности и непрерывности слева в точках разрыва.

Кроме того, на управления может также накладываться ограничение принадлежности некоторому фиксированному множеству  $\mathcal{U}$ .

Поведение системы под управляющим воздействием описывается системой дифференциальных уравнений — *уравнений движения*

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \varphi_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Задача оптимального управления** в общей постановке формулируется следующим образом. *Требуется найти управляющий вектор  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ , доставляющий максимум целевому функционалу*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) \rightarrow \max \quad (12.1.1)$$

*при наличии ограничений*

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \varphi_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.1.2)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1. \quad (12.1.3)$$

Функции  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\varphi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  и  $F(t, \mathbf{x})$  предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по каждому аргументу.

## § 12.2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА

Решение задач нелинейного программирования, в которых требуется найти точку в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , доставляющую максимум (или минимум) некоторой целевой функции при наличии нелинейных ограничений, основывается на поиске седловой точки функции Лагранжа, которая равна сумме целевой функции и скалярного произведения вектора множителей Лагранжа на вектор разностей между правыми и левыми частями ограничений.

Аналогичный подход применяется и для решения задач оптимального управления, только в этих задачах роль неизвестных выполняют управления  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ , т. е. ищется точка не в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , а в пространстве функций. Максимизируется в задачах оптимального управления не функция (как в нелинейном программировании), а интегральный функционал, ограничения представлены дифференциальными уравнениями движения.

Скалярное произведение в пространстве функций определяется как интеграл:

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} a(t)b(t) dt.$$

Если каждому из уравнений движения (12.2.2) поставлена в соответствие сопряженная переменная — функция  $y_i(t)$ , то функция Лагранжа для задачи оптимального управления (12.1.1)—(12.1.3) определяется как

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) &= \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n y_i(t) \left( \varphi_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{dx_i}{dt} \right) dt.
\end{aligned} \tag{12.2.1}$$

Здесь

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_n(t)) \text{ —}$$

вектор сопряженных переменных.

*Седловой точкой функции Лагранжа* называется такая точка  $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t))$  пространства функций, что

$$L(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}^*(t)) \leq L(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t)) \leq L(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}(t)) \tag{12.2.2}$$

для всех функций  $\mathbf{y}(t)$  и всех кусочно-непрерывных функций  $\mathbf{u}(t)$ .

**ТЕОРЕМА.** Седловая точка функции Лагранжа (12.2.3) определяет решение распределенной задачи оптимального управления (12.1.1)—(12.1.3).

**Доказательство.** Траекторию, соответствующую управлению  $\mathbf{u}(t)$ , будем обозначать  $\mathbf{x}(t)$ , а траекторию, соответствующую управлению  $\mathbf{u}^*(t)$ , —  $\mathbf{x}^*(t)$ .

Из второго неравенства в (12.2.2) следует, что

$$L(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t)) - L(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}(t)) \leq 0$$

или

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt - F(t_1, \mathbf{x}^1) - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt \leq 0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt \leq 0, \tag{12.2.4}$$

для всех функций  $\mathbf{y}(t)$ .

Предположим, что

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \neq \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)).$$

В этом случае можно найти такую функцию  $\mathbf{y}(t)$ , чтобы интеграл в левой части (12.2.3) был положителен, что противоречит неравенству (12.2.3). Поэтому если  $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t))$  — седловая точка функции Лагранжа, то

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = \boldsymbol{\varphi}_i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \quad (12.2.5)$$

т. е. траектория  $\mathbf{x}^*(t)$ , соответствующая управлению  $\mathbf{u}^*(t)$ , удовлетворяет уравнениям (12.1.2).

Первое из неравенств в (12.2.2) означает, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t)) - L(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}^*(t)) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt - F(t_1, \mathbf{x}^1) - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) - \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt - F(t_1, \mathbf{x}^1) + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) &\geq \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) - (12.2.6) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^*(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Первый из интегралов в правой части (12.2.6) равен нулю в силу (12.2.4). Второй интеграл в правой части (12.2.6) равен нулю для любой траектории  $\mathbf{x}(t)$ , удовлетворяющей уравнениям (12.1.2).

Итак, для любой траектории  $\mathbf{x}(t)$ , удовлетворяющей уравнениям (12.1.2),

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) \geq \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1),$$

т. е. управление  $\mathbf{u}^*(t)$  является оптимальным, что полностью доказывает теорему.  $\square$

Функцией Гамильтона или гамильтонианом задачи оптимального управления (12.1.1)—(12.1.3) называется функция

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{y}(t)\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (12.2.7)$$

**ТЕОРЕМА.** В седловой точке функции Лагранжа выполняются следующие необходимые условия:

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t)) = \max_{\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \quad t_0 < t < t_1, \quad (12.2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}^*}, \quad t_0 < t < t_1, \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (12.2.9)$$

$$\frac{d\mathbf{y}^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^*}, \quad t_0 < t < t_1, \quad \mathbf{y}^*(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^{1*}}. \quad (12.2.10)$$

**Доказательство.** Как было продемонстрировано при доказательстве предыдущей теоремы, если  $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t))$  — седловая точка функции Лагранжа, то траектория  $\mathbf{x}^*(t)$ , соответствующая управлению  $\mathbf{u}^*(t)$ , удовлетворяет уравнениям (12.1.2):

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \varphi_i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2.11)$$

Вычислим производную гамильтониана по переменной  $y_i^*$  в седловой точке функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t))}{\partial y_i^*} = \\ & = \frac{\partial \left( f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \sum_{i=1}^n y_i^*(t) \varphi_i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \right)}{\partial y_i^*} = \varphi_i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \end{aligned} \quad (12.2.12)$$

Сравнивая правые части в (12.2.11) и (12.2.12), приходим к справедливости (12.2.9).

Теперь проинтегрируем по частям вычитаемое в функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}(t) \left( \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} (f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{y}(t)\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) dt + F(t_1, \mathbf{x}^1) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \mathbf{x}(t) dt - \mathbf{y}(t_1) \mathbf{x}(t_1) + \mathbf{y}(t_0) \mathbf{x}(t_0).
\end{aligned}$$

В случае, когда на управление не наложены никакие ограничения, кроме кусочной непрерывности, переход от управления  $\mathbf{u}(t)$  к управлению  $\mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$  приведет к переходу от траектории от  $\mathbf{x}(t)$  к  $\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$ . При этом, как следует из (12.2.13), функция Лагранжа изменяется на

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Delta\mathbf{u}(t) + \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right) \Delta\mathbf{x}(t) \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^1} - \mathbf{y}(t_1) \right) \Delta\mathbf{x}^1,$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial u_1} & \frac{\partial H}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial u_k} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Так как для существования максимума функции Лагранжа необходимо, чтобы приращение  $\Delta L$  обращалось в нуль, получаем отсюда, что

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}^*} = \mathbf{0}, \quad t_0 < t < t_1; \quad (12.2.14)$$

$$\frac{d\mathbf{y}^*}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^*}, \quad t_0 < t < t_1;$$

$$\mathbf{y}^*(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^{1*}}.$$

В общем случае, когда на управление  $\mathbf{u}(t)$  наложено ограничение  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ , условие (12.2.14) заменяется на

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{y}^*(t)) = \max_{\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \quad t_0 < t < t_1.$$

Теорема полностью доказана.  $\square$

Часто удобна покомпонентная запись условий (12.2.9)—(12.2.10):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2.9')$$

$$\frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad y_i(t_0) = \frac{\partial F}{\partial x_i^1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2.10')$$

**Алгоритм применения принципа максимума** к задаче оптимального управления состоит в том, что для каждого уравнения движения вво-

дится сопряженная переменная  $y(t)$ , строится функция Гамильтона (12.2.7), определяются функции  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ , удовлетворяющие условиям (12.2.8)—(12.2.10), и из участков управлений  $u(t)$ , доставляющих гамильтониану максимум при каждом  $t$ , формируется оптимальная управляющая траектория.

Принцип максимума дает необходимые, но, вообще говоря, не достаточные условия для существования максимума в задаче оптимального управления.

Однако в определенных частных случаях условия принципа максимума являются **необходимыми и достаточными условиями оптимальности**.

Приведем без доказательства два таких частных случая:

- когда гамильтониан линеен относительно управляющих параметров (достаточные условия Розоноера);
- когда максимум гамильтониана представляет собой выпуклую вверх функцию по фазовым координатам (достаточные условия Мангасаряна).

### § 12.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Опишем модель национальной экономики, предложенную в 1956 г. Р. Солоу, Нобелевским лауреатом 1987 г. в области экономики.

В замкнутой односекторной экономической системе производится один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Основные предположения модели Солоу состоят в постоянстве темпа прироста числа занятых, износа основных производственных фондов и нормы накопления, отсутствии лага (т. е. запаздывания) капиталовложений.

Состояние экономики в момент времени  $t$  определяется следующими показателями:

- валовым выпуском  $X(t)$ ;
- капиталом (основными фондами)  $K(t)$ ;
- числом занятых в производственной сфере  $L(t)$ ;
- валовыми инвестициями  $I(t)$ ;
- фондом непроизводственного потребления  $C(t)$ .

Пусть годовой темп прироста числа занятых составляет  $v$ , тогда за промежуток времени  $dt$  численность занятых изменяется на величину  $dL = vL(t)dt$ , значит, для  $L(t)$  можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{dL}{dt} = vL(t),$$

решением которого является функция

$$L(t) = L_0 e^{vt},$$

где  $L_0$  — число занятых в начальный момент времени.

Пусть за год *выбывает* (изнашивается и приходит в негодность) доля  $\mu$  основных производственных фондов, норма накопления составляет  $\rho$ , а годовой валовой внутренний продукт определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией  $X = F(K, L)$ . Тогда износ и инвестиции в расчете на год равны  $\mu K(t)$  и  $I(t) = \rho X(t) = \rho F(K(t), L(t))$  соответственно, лаг капиталовложений отсутствует, значит, прирост фондов за промежуток времени  $dt$  составляет  $dK = -\mu K(t)dt + I(t)dt$  или

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + \rho F(K(t), L(t)). \quad (12.3.1)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + \rho L(t) F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right),$$

где мы учли, что  $F(K, L) = LF(K/L, 1)$ , поскольку производственная функция  $F(K, L)$  является линейно-однородной.

Перейдем теперь к относительным показателям:

- фондовооруженности  $k(t) = K(t) / L(t)$ ;
- средней производительности труда  $x(t) = X(t) / L(t)$ ;
- удельным инвестициям  $i(t) = I(t) / L(t)$ ;
- среднеличному потреблению  $c(t) = C(t) / L(t)$ .

Найдем

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt}$$

по формуле производной частного. Имеем:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt} L(t) - \frac{dL}{dt} K(t)}{(L(t))^2},$$

при этом

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + \rho L(t) F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right), \quad \frac{dL}{dt} = vL(t),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= \frac{\frac{dK}{dt}L(t) - \frac{dL}{dt}K(t)}{(L(t))^2} = \frac{\left(-\mu K(t) + \rho L(t)F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)\right)L(t) - \nu L(t)K(t)}{(L(t))^2} = \\ &= \frac{\left(-(\mu + \nu)K(t) + \rho L(t)F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)\right)L(t)}{(L(t))^2} = -(\mu + \nu)\frac{K(t)}{L(t)} + \rho F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = \\ &= -(\mu + \nu)k(t) + \rho F(k(t), 1),\end{aligned}$$

т. е. для фондовооруженности  $k(t)$  справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{dk}{dt} = -(\mu + \nu)k(t) + \rho F(k(t), 1).$$

Рассмотрим в качестве производственной функции функцию Кобба — Дугласа  $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ , при этом  $F(k, 1) = Ak^\alpha$ .

Введя обозначения  $\lambda = \mu + \nu$ ,  $f(k) = F(k, 1) = Ak^\alpha$ , получаем окончательно **модель Солоу в относительных показателях**:

$$\begin{cases} \frac{dk_t}{dt} = -\lambda k_t + \rho f(k(t)), \\ k_0 = K_0 / L_0, \\ x(t) = f(k(t)), \quad i(t) = \rho f(k(t)), \quad c(t) = (1 - \rho)f(k(t)). \end{cases}$$

Говорят, что экономика находится на *стационарной траектории*, если относительные показатели не меняются во времени. Поскольку  $x(t)$ ,  $i(t)$ , и  $c(t)$  являются функциями от  $k(t)$ , то для того, чтобы экономика находилась на стационарной траектории, необходимо и достаточно постоянства во времени фондовооруженности  $k(t)$ , т. е.

$$\frac{dk}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad -\lambda k + \rho f(k) = 0.$$

Подставим сюда  $f(k) = Ak^\alpha$ , получим условие стационарности траектории:

$$-\lambda k + \rho Ak^\alpha = 0.$$

Вынесем  $k^\alpha$  за скобку:

$$k^\alpha (-\lambda k^{1-\alpha} + \rho A) = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что возможны две стационарные траектории экономики: вырожденная [когда  $k = 0$ , при этом  $x = Ak^\alpha = 0$ ,  $i = \rho Ak^\alpha = 0$ ,  $c = (1 - \rho)Ak^\alpha = 0$ ] и невырожденная [когда  $-\lambda k^{1-\alpha} + \rho A = 0$ ].

Из условия  $-\lambda k^{1-\alpha} + \rho A = 0 \Leftrightarrow k^{1-\alpha} = \rho A / \lambda$  следует, что на невырожденной стационарной траектории постоянные значения относительных показателей равны

$$k^\circ = \left( \frac{\rho A}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x^\circ = A(k^\circ)^\alpha = A \left( \frac{\rho A}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

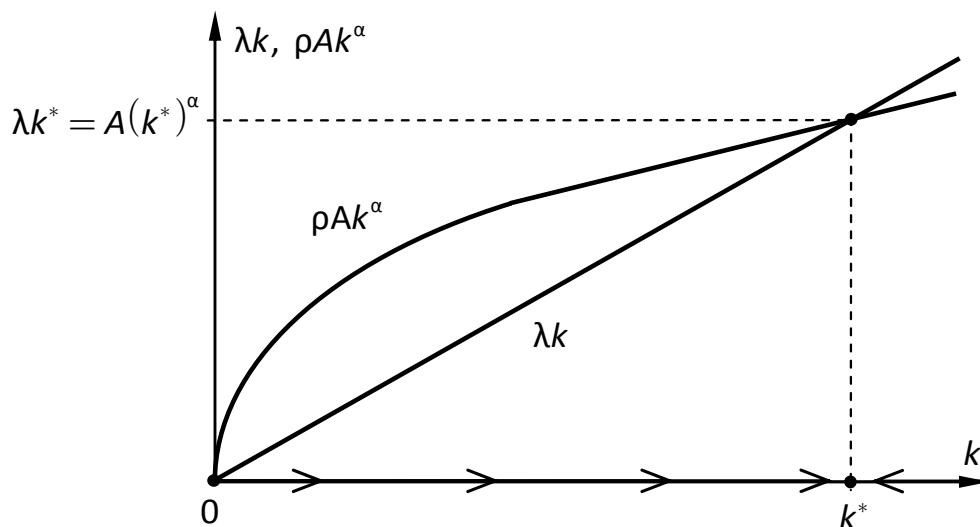
$$i^\circ = \rho A(k^\circ)^\alpha = \rho A \left( \frac{\rho A}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad c^\circ = (1 - \rho)A(k^\circ)^\alpha = (1 - \rho)A \left( \frac{\rho A}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Исследуем, что произойдет, если экономика отклонится от стационарной траектории. Изобразим на рис. 12.3.1 графики функций  $\lambda k$  и  $\rho A k^\alpha$  [здесь  $\alpha \in (0, 1)$ ].

Рассмотрим вначале **вырожденную стационарную траекторию** (на ней  $k(t) = 0$ ). Если  $k(t)$  станет чуть больше нуля, то, как видно из рис. 12.3.1,  $\rho A k^\alpha > \lambda k$ , поэтому производная

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho A k^\alpha > 0,$$

откуда следует, что фондовооруженность  $k(t)$  будет возрастать. При этом  $dk / dt$  остается положительной при всех  $k(t) \in (0, k^\circ)$ , поэтому вырожденная стационарная траектория является неустойчивой: достаточно малейшего возмущения, и  $k(t)$  начинает возрастать в сторону  $k = k^\circ$ ; при  $k(t) = k^\circ$  производная  $dk / dt$  становится равной нулю, т. е.  $k(t)$  перестает меняться.



**Рис. 12.3.1.** Исследование устойчивости стационарных траекторий экономики в модели Солоу

Если экономика находится на невырожденной стационарной траектории  $k(t) = k^\circ$ , и произошло незначительное отклонение фондовооруженности в л е в о от стационарного значения  $k^\circ$ , то, как мы уже убедились,  $k(t)$  начинает возрастать до тех пор, пока вновь не вернется к значению  $k^\circ$ . Если же  $k(t)$  отклонится от  $k^\circ$  в п р а в о, то, как показывает рис. 12.3.1,  $\rho A(k(t))^\alpha < \lambda k(t)$ , поэтому производная

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k(t) + \rho A(k(t))^\alpha < 0,$$

значит,  $k(t)$  будет убывать до тех пор, пока не станет равной  $k^\circ$ . Таким образом, невырожденная стационарная траектория

$$k(t) = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x_t = A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad i(t) = \rho A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad c(t) = (1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

является у с т о й ч и в о й: при любом отклонении от этой траектории экономика стремится к ней вернуться.

Данная невырожденная стационарная траектория носит название *траектории сбалансированного устойчивого экономического роста*: численность занятых на ней возрастает экспоненциально:  $L(t) = L_0 e^{vt}$  (конечно, при положительном темпе прироста занятых  $v$ ), а все относительные показатели постоянны, значит, все абсолютные показатели возрастают пропорционально численности занятых  $L(t)$ .

Рассмотрим теперь **простейшую задачу управления** экономикой, которая описывается моделью Солоу: попытаемся подобрать такую норму накопления  $\rho$ , чтобы удельное потребление на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста было максимальным.

**ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО НАКОПЛЕНИЯ.** *Чтобы удельное потребление на стационарной траектории сбалансированного экономического роста было максимальным, норма накопления  $\rho$  должна быть равна эластичности выпуска по фондам  $\alpha$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим удельное потребление на стационарной траектории  $c^\circ$  как функцию нормы накопления:

$$c^\circ = c^\circ(\rho) = (1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

и поставим задачу определения такой нормы накопления  $\rho$ , чтобы

$$c^\circ(\rho) \rightarrow \max$$

или, расписывая  $c^\circ(\rho)$  подробно,

$$(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \rightarrow \max.$$

В точке максимума первая производная должна быть равна нулю (или не существовать), а вторая производная должна быть отрицательной. В данном случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dc^{\circ}(\rho)}{d\rho} &= \frac{d\left((1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho} = \\ &= A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{d\left((1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho} = A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{d\left(\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \rho^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho} = \\ &= A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{d\left(\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho} - \frac{d\left(\rho^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{d\rho}\right) = A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \frac{1}{1-\alpha} \rho^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\right) = \\ &= \frac{A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \left(\alpha \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) = \frac{A\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} (\alpha - \rho). \end{aligned}$$

Видим, что  $dc^{\circ}(\rho)/d\rho = 0$  при  $\rho = 0$  и при  $\rho = \alpha$ . Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что в точке  $\rho_* = 0$  вторая производная  $d^2c^{\circ}(\rho)/d\rho^2 > 0$ , т. е. точка  $\rho_* = 0$  является точкой минимума удельного потребления на стационарной траектории, а в точке  $\rho^* = \alpha$  вторая производная  $d^2c^{\circ}(\rho)/d\rho^2 < 0$ , т. е. точка  $\rho^* = \alpha$  является точкой максимума удельного потребления, что и требовалось доказать.  $\square$

Этот результат получен в 1966 г. Э. Фелпсом.

**ПРИМЕР 12.3.1.** Даны значения параметров  $A = 10^3$  и  $\alpha = 0,5$  производственной функции Кобба — Дугласа. В модели Солоу с этой производственной функцией требуется рассчитать значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста, на которой норма накопления равна  $\rho = 0,2$ , коэффициент выбытия основных производственных фондов за год составляет  $\mu = 0,2$ , а годовой темп прироста численности занятых равен  $\nu = 0,05$ . Сравнить полученное значение удельного потребления с оптимальным.

**РЕШЕНИЕ.** На стационарной траектории, соответствующей норме накопления  $\rho = 0,2$ , фондовооруженность

$$k^{\circ} = \left( \frac{\rho A}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left( \frac{0,2 \cdot 10^3}{0,2 + 0,05} \right)^{\frac{1}{1-0,5}} = 64 \cdot 10^4,$$

средняя производительность труда

$$x^{\circ} = A(k^{\circ})^{\alpha} = 10(64 \cdot 10^4)^{0,5} = 8 \cdot 10^5,$$

удельное потребление

$$c^{\circ} = (1 - \rho)x^{\circ} = (1 - 0,2)8 \cdot 10^5 = 64 \cdot 10^4.$$

Согласно золотому правилу накопления, для того чтобы на стационарной траектории сбалансированного устойчивого экономического роста удельное потребление было максимальным, нужно выбрать норму накопления  $\rho$  равной эластичности выпуска по фондам  $\alpha$ , т. е. в рассматриваемом примере максимум удельного потребления на стационарной траектории достигается при  $\rho^* = \alpha = 0,5$ . При этом

$$k^* = \left( \frac{\rho^* A}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left( \frac{0,5 \cdot 10^3}{0,2 + 0,05} \right)^{\frac{1}{1-0,5}} = 4 \cdot 10^6,$$

$$c^* = (1 - \rho^*)x^* = (1 - \rho^*)A(k^*)^{\alpha} = (1 - 0,5) \cdot 10^3 \cdot (4 \cdot 10^6)^{0,5} = 10^6 \gg 64 \cdot 10^4.$$

Видим, что оптимальный выбор нормы накопления приводит к существенному увеличению удельного потребления на стационарной траектории — более чем в полтора раза!  $\square$

Будем теперь считать, что норма накопления не является константой, а изменяется во времени. Для этого удобнее всего представить инвестиции в основные производственные фонды в виде разности валового продукта и валового потребления. Уравнение (12.3.1) в таком случае превращается в следующее:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + F(K(t), L(t)) - C(t). \quad (12.3.2)$$

Переход в (12.3.2) к относительным показателям дает

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k(t) + f(k(t)) - c(t).$$

Модель оптимального экономического роста предполагает максимизацию интегрального дисконтированного (по непрерывной ставке  $\delta$ ) удельного потребления

$$J = \int_0^T c(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max \quad (12.3.3)$$

при условиях

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\lambda k(t) + f(k(t)) - c(t), \\ k_0 = K_0 / L_0, \\ x(t) = f(k(t)), \quad i(t) = f(k(t)) - c(t). \end{cases} \quad (12.3.4)$$

Горизонт планирования  $T$  в данной задаче может быть конечным или бесконечным. В случае планирования на конечный период в максимизируемый целевой функционал (12.3.3) целесообразно добавить слагаемое, накладывающее условие на минимальную фондовооруженность к концу периода  $[0, T]$ .

Модель (12.3.3)—(12.3.4) представляет собой задачу оптимального управления, фазовой переменной в которой выступает фондовооруженность  $k(t)$ , а управляющей переменной— удельное потребление  $c(t)$ . На управление накладывается очевидное ограничение:

$$0 \leq \underline{c} \leq c(t) \leq f(k(t))$$

(здесь  $\underline{c}$  — минимально допустимое удельное потребление).

Введем одну сопряженную переменную  $y(t)$ , соответствующую единственной фазовой переменной  $k(t)$ , и построим гамильтониан

$$H(t, k(t), c(t), y(t)) = c(t)e^{-\delta t} + y(t)(-\lambda k(t) + f(k(t)) - c(t)).$$

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = (\lambda - f'(k(t)))y(t), \quad y(+\infty) = 0. \quad (12.3.5)$$

Сопряженную переменную удобно представить в виде  $y(t) = m(t)e^{-\delta t}$  и подставить

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dm}{dt}e^{-\delta t} - \delta m(t)e^{-\delta t}$$

в уравнение (12.3.5):

$$\frac{dm}{dt}e^{-\delta t} - \delta m(t)e^{-\delta t} = (\lambda - f'(k(t)))m(t)e^{-\delta t}$$

или

$$\frac{dm}{dt} = (\lambda + \delta - f'(k(t)))m(t). \quad (12.3.6)$$

Общее решение уравнения (12.3.6) имеет вид  $m(t) = e^{-\int (f'(k(t)) - (\lambda + \delta)) dt}$ , поэтому, очевидно,  $m(t) > 0$ .

Гамильтониан

$$\begin{aligned} H(t, k(t), c(t), y(t)) &= c(t)e^{-\delta t} + m(t)e^{-\delta t}(-\lambda k(t) + f(k(t)) - c(t)) = \\ &= ((1 - m(t))c(t) + m(t)(f(k(t)) - \lambda k(t)))e^{-\delta t} \end{aligned}$$

при  $m(t) \neq 1$  линейно зависит от управления  $c(t)$ , поэтому максимум гамильтониана по управляющей переменной  $c(t)$  может достигаться только на концах отрезка  $[\underline{c}, f(k(t))]$ . Таким образом, оптимальное управление при  $m(t) \neq 1$  определяется так:

$$c^*(t) = \begin{cases} \underline{c}, & m(t) > 1, \\ f(k(t)), & m(t) < 1. \end{cases}$$

При  $m(t) = 1$  гамильтониан

$$H(t, k(t), c(t), y(t)) = (f(k(t)) - \lambda k(t))e^{-\delta t},$$

и его максимум по фазовой переменной  $k(t)$  достигается при  $f'(k(t)) = \lambda$ . Если положить  $c(t) = f(k(t)) - \lambda k(t)$ , то траектория, соответствующая такому управлению, будет стационарной, так как на ней

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k(t) + f(k(t)) - c(t) = 0$$

Отсюда следует, что на такой траектории  $f'(k(t)) = \lambda$ .

Таким образом, при  $m(t) = 1$  оптимальное управление определяется как  $c^*(t) = f(k^*(t)) - \lambda k^*(t)$

Окончательно получаем:

$$c^*(t) = \begin{cases} \underline{c}, & m(t) > 1, \\ f(k(t)) - \lambda k(t), & m(t) = 1, \\ f(k(t)), & m(t) < 1. \end{cases} \quad (12.3.7)$$

В случае производственной функции Кобба — Дугласа

$$f(k) = Ak^\alpha, \quad f'(k) = \frac{\alpha A}{k^{1-\alpha}},$$

Поэтому условие  $f'(k) = \lambda$  определяет

$$k^* = \left( \frac{\alpha A}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Сформулируем теперь **правила оптимального управления экономикой** в соответствии с (12.3.7). Пока фондовооруженность меньше  $k^*$ , следует ограничить удельное потребление на минимально допустимом уровне  $\underline{c}$ . Как только фондовооруженность достигнет стационарного значения  $k^*$ , следует скачком увеличить удельное потребление с  $\underline{c}$  до  $f(k^*) - \lambda k^*$ . Если же фондовооруженность больше стационарного значения, то на потребление следует отправлять весь выпуск:  $c^* = f(k^*)$ , и когда за счет проедания фондов экономика выйдет на стационарную траекторию  $k(t) = k^*$ , следует уменьшить удельное потребление до  $f(k^*) - \lambda k^*$ .

На стационарной траектории при этом обеспечивается поддержание фондовооруженности и удельного потребления на постоянном уровне:  $k(t) = k^*$ ,  $c(t) = f(k^*) - \lambda k^*$ .

## **§ 12.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗРАБОТЧИКОВ КОММЕРЧЕСКОГО И НЕКОММЕРЧЕСКОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

В этом параграфе излагаются результаты анализа смешанной дуополии производителей коммерческого программного обеспечения (для определенности, серверной операционной системы *Microsoft Windows*) и некоммерческого (для определенности, *Linux*), полученные автором в 2008 г. путем применения аппарата теории оптимального управления.

Будем предполагать рынок программного обеспечения **линейно растущим** с темпом роста  $a$ : в единицу времени на рынок приходят  $a$  новых пользователей, т. е. суммарное число пользователей на рынке серверных операционных систем к моменту времени  $t$  равно  $N(t) = N_0 + at$ .

Предположим, что каждый новый пользователь выбирает один и только один продукт: или приобретает лицензионную копию *Windows*, или бесплатно скачивает копию *Linux*.

Через  $n_w(t)$  и  $n_L(t)$  обозначим суммарное число пользователей, использующих на момент  $t$  операционные системы *Windows* и *Linux* соответственно.

Если обозначить  $q(t)$  **долю новых пользователей, входящих на рынок в момент  $t$  и приобретающих *Windows***, то доля новых пользователей, приобретающих в этот момент *Linux*, составит  $1 - q(t)$ , поэтому

$$n_w(t) = \int_0^t a q(\tau) d\tau, \quad (12.4.1)$$

$$n_L(t) = \int_0^t a(1 - q(\tau)) d\tau. \quad (12.4.2)$$

Цена некоммерческого продукта *Linux* предполагается нулевой (или равной предельным издержкам), а коммерческий производитель *Microsoft* принимает решение об установлении цены лицензии на использование продукта *Windows* в размере  $p$  ден. ед.

Функции спроса на *Windows*

$$p = \alpha_W(n_W(t), n_L(t))(1 - q)$$

и на *Linux*

$$p = \alpha_L(n_W(t), n_L(t))(1 - q)$$

считаются в модели линейными в каждый момент времени, но их наклон предполагается динамически изменяющимся в зависимости от объемов рынка, занятых обоими продуктами.

На рис. 12.4.1 представлены сечения функций спроса на *Windows* (жирная сплошная линия) и на *Linux* (жирная пунктирная линия) в фиксированный момент времени  $t$ .

Эти функции спроса показывают, как высоко пользователь оценивает каждую из операционных систем, например, на рис. 12.4.1 доля пользователей  $q(t)$  оценивает *Windows* дороже, чем  $p$  ден. ед., а доля  $1 - q(t)$  — дешевле, чем  $p$  ден. ед.

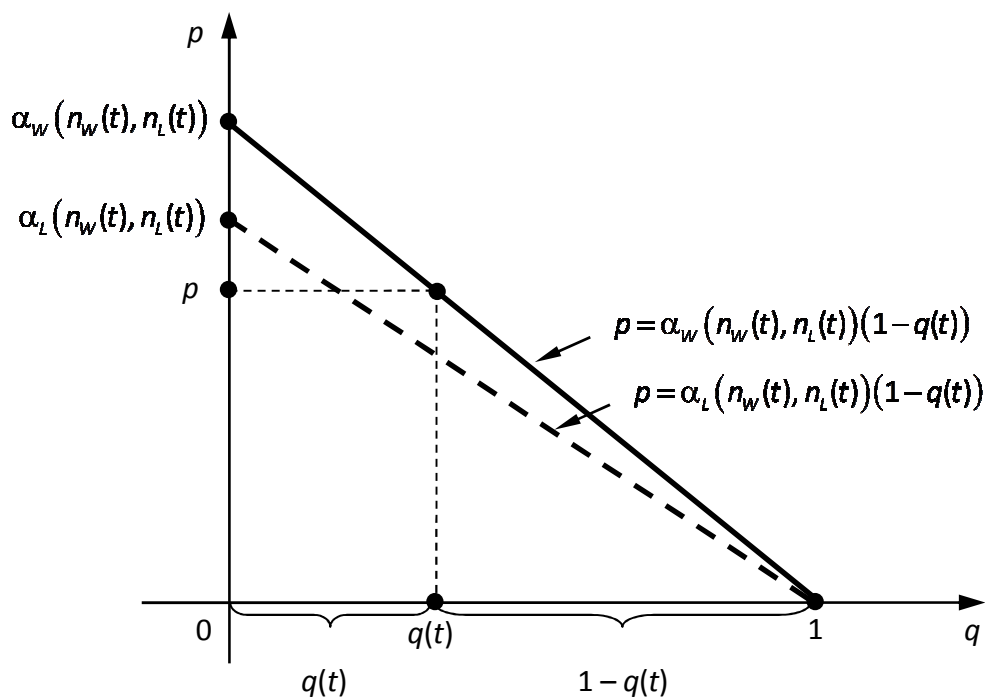


Рис. 12.4.2. Спрос на *Windows* и *Linux*

Несмотря на то, что *Linux* распространяется бесплатно, функция спроса этой операционной системы не сливается с осью абсцисс: в момент времени  $t$  для любого числа  $p \in [0; \alpha_L(n_W(t), n_L(t))]$  часть пользователей готова заплатить за эту операционную систему сумму, превышающую  $p$  ден. ед.

Очевидно, на сегодняшний день функция спроса на *Linux* является более пологой, чем функция спроса на *Windows*: в противном случае при нулевой цене *Linux* все пользователи приобретали бы только эту операционную систему — как имеющую наибольшую потребительскую ценность и при этом предлагающуюся бесплатно, но на реальном рынке это не так.

Функции  $\alpha_W(n_W(t), n_L(t))$  и  $\alpha_L(n_W(t), n_L(t))$ , определяющие динамику наклона функций спроса в зависимости от числа существующих пользователей программных продуктов, называются *технологическими траекториями*.

Будем считать, что технологические траектории в каждый момент времени  $t$  определяются взвешенной разностью

$$y(t) = \tilde{y}(n_W(t), n_L(t)) = n_W(t) - sn_L(t) \quad (12.4.3)$$

долей рынка, занимаемых операционными системами *Windows* и *Linux*:

$$\begin{aligned} \alpha_W(n_W(t), n_L(t)) &= \tilde{\alpha}_W(n_W(t) - sn_L(t)) = \\ &= \tilde{\alpha}_W(\tilde{y}(n_W(t), n_L(t))) = \tilde{\alpha}_W(y(t)), \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_L(n_W(t), n_L(t)) &= \tilde{\alpha}_L(n_W(t) - sn_L(t)) = \\ &= \tilde{\alpha}_L(\tilde{y}(n_W(t), n_L(t))) = \tilde{\alpha}_L(y(t)). \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

При  $s = 1$  технологические траектории определяются просто разностью суммарного числа пользователей *Windows* и суммарного числа пользователей *Linux* к данному моменту времени.

В общем случае константа  $s$  определяет характер обучения пользователей: поскольку

$$s = -\frac{\partial \tilde{y}}{\partial n_L},$$

при  $s > 1$  увеличение числа  $n_L(t)$  пользователей *Linux* больше усиливает брэнд *Linux*, чем ослабляет брэнд *Windows*, а при  $s < 1$  — наоборот.

Предполагается, что технологические траектории  $\alpha_W(n_W(t), n_L(t))$  и  $\alpha_L(n_W(t), n_L(t))$  удовлетворяют следующим естественным допущениям:

- с ростом размера рынка, занимаемого каждым из продуктов, его потребительская ценность растет:

$$\frac{\partial \alpha_W(n_W(t), n_L(t))}{\partial n_W} > 0; \quad \frac{\partial \alpha_L(n_W(t), n_L(t))}{\partial n_L} > 0;$$

- потребительская ценность каждой из операционных систем конечна, даже если все пользователи будут использовать эту операционную систему:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_W(y) = \bar{\alpha}_W < +\infty; \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \tilde{\alpha}_L(y) = \bar{\alpha}_L < +\infty;$$

- потребительская ценность операционной системы, которой никто не пользуется, а все пользуются конкурирующим продуктом, равна нулю:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tilde{\alpha}_W(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_L(y) = 0.$$

Из сделанных предположений следует, очевидно, что  $\tilde{\alpha}_W(y) \geq 0$ ;  $\tilde{\alpha}_L(y) \geq 0$  для всех вещественных  $y$ .

Кроме того, из первого предположения следует, в частности, что

$$\frac{\partial \alpha_W(n_W(t), n_L(t))}{\partial n_L} < 0; \quad \frac{\partial \alpha_L(n_W(t), n_L(t))}{\partial n_W} < 0,$$

т. е. с ростом размера рынка, занимаемого каждым из продуктов, потребительская ценность конкурирующего продукта снижается.

Будем считать, что потенциальная потребительская ценность *Linux* выше, чем *Windows*:  $\bar{\alpha}_W < \bar{\alpha}_L$ .

Обозначим  $y^\circ$  решение уравнения

$$\tilde{\alpha}_W(y) = \tilde{\alpha}_L(y) \text{ —}$$

оно соответствует такому разделению рынка между *Windows* и *Linux*, при котором потребительская оценка этих продуктов одинакова. Положим

$$\beta(y) = \tilde{\alpha}_W(y) - \tilde{\alpha}_L(y) \quad (12.4.6)$$

и будем считать, что

$$\forall y > y^\circ \quad \frac{d^2 \beta}{dy^2} \leq 0,$$

т. е. что с увеличением объема рынка, занимаемого операционной системой *Windows*, влияние структуры рынка на разницу между потребительскими ценностями операционных систем уменьшается.

Из сделанных предположений следует, очевидно, что  $y^\circ$  существует и единственно.

**Рассмотрим случай монополии разработчика коммерческого программного продукта *Windows*.**

Производитель этого продукта — *Microsoft* — стремится так управлять ценой лицензии  $p(t)$ , чтобы обеспечить себе *максимум интегрального дисконтированного (по непрерывной ставке  $\delta$ ) дохода*

$$J = \int_0^{+\infty} aq(t)p(t)e^{-\delta t} dt \rightarrow \max \quad (12.4.7)$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = aq(t); \quad (12.4.8)$$

$$p(t) = \tilde{\alpha}_w(y(t))(1 - q(t)); \quad (12.4.9)$$

$$p(t) \geq 0.$$

Постановка задачи максимизации дохода (а не прибыли) в данном случае оправдана, ввиду того, что речь идет о стадии распространения, когда производитель уже понес постоянные издержки по разработке продукта, а переменные издержки по его тиражированию близки к нулю (и включены в цену лицензии).

Свойства оптимальной стратегии производителя коммерческого программного обеспечения на монопольном рынке определяются следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА.** *Оптимальная стратегия монопольного производителя коммерческого программного обеспечения, обеспечивающая неограниченный рост рынка и бесконечную интегральную дисконтированную прибыль, на больших временах соответствует установлению цены лицензии на уровне половины от потенциальной потребительской ценности данного программного обеспечения; при этом мгновенная прибыль равна четверти произведения темпа роста рынка на потенциальную потребительскую ценность продукта.*

**Доказательство.** Выразим из формулы (12.4.9)

$$q(t) = 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \quad (12.4.10)$$

и подставим в (12.4.7) и (12.4.8), тогда задача примет следующий вид:

$$J = \int_0^{+\infty} a \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right) p(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = a \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right);$$

$$p(t) \geq 0.$$

Составим гамильтониан [сопряженную переменную обозначим  $m(t)e^{-\delta t}$ ]:

$$\begin{aligned} H &= a \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right) p(t) e^{-\delta t} + m(t) e^{-\delta t} a \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right) = \\ &= a e^{-\delta t} \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right) (p(t) + m(t)). \end{aligned}$$

Запишем необходимые условия принципа максимума Понтрягина:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow p(t) = \frac{\tilde{\alpha}_w(y(t)) - m(t)}{2}; \quad (12.4.11)$$

$$\frac{d(m(t)e^{-\delta t})}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a \tilde{\alpha}'_w(y(t)) p(t) (p(t) + m(t))}{\tilde{\alpha}_w^2(y(t))}; \quad (12.4.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (m(t)e^{-\delta t})} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = a \left( 1 - \frac{p(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right). \quad (12.4.13)$$

Подставляя выражение  $c(t)$  из (12.4.11) в (12.4.12) и (12.4.13), получаем соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \delta m(t) - \frac{a \tilde{\alpha}'_w(y(t)) (\tilde{\alpha}_w^2(y(t)) - m^2(t))}{4 \tilde{\alpha}_w^2(y(t))}; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{m(t)}{\tilde{\alpha}_w(y(t))} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y^*(t) = +\infty,$$

поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_w(y(t)) = \bar{\alpha}_w,$$

т. е. с ростом объема продаж функция спроса перестает изменяться:

$$p = \bar{\alpha}_w(1 - q),$$

значит,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p^*(t) = \frac{\bar{\alpha}_w}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} m^*(t) = +\infty,$$

и из формулы (12.4.10)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q^*(t) = \frac{1}{2}.$$

Мгновенная прибыль при этом равна

$$\pi^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} (aq^*(t)p^*(t)) = \frac{a\bar{\alpha}_w}{4}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Установление предельной цены на уровне половины от потенциальной потребительской ценности продукта соответствует классическим выводам для монопольной статики, воспроизведенным в предыдущей главе. Запомним этот результат, чтобы сравнить его со случаем дуополии.

**Перейдем теперь к исследованию динамики конкурентной борьбы производителей коммерческого и некоммерческого программных продуктов.**

Так как функции спроса на *Windows* и *Linux* заданы формулами (12.4.4) и (12.4.5) соответственно, при этом *Linux* распространяется свободно, а *Windows* в момент  $t$  продается по цене  $p(t) \geq 0$ , цена *Windows*, при которой пользователю будет безразличен выбор между коммерческим и некоммерческим продуктами, определяется формулой

$$\tilde{\alpha}_w(y(t))(1 - q(t)) - p(t) = \tilde{\alpha}_L(y(t))(1 - q(t)).$$

Отсюда

$$p(t) = (\tilde{\alpha}_w(y(t)) - \tilde{\alpha}_L(y(t)))(1 - q(t))$$

или

$$p(t) = \beta(y(t))(1 - q(t)),$$

где функция  $\beta(y)$  определена формулой (12.4.6).

Иными словами, если в момент времени  $t$  *Microsoft* устанавливает цену лицензии на *Windows*, равную  $p(t)$ , то доля

$$q(t) = 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))}$$

новых пользователей, которые в данный момент считают, что разность между потребительскими ценностями *Windows* и *Linux* превышает цену лицензии *Windows*, приобретет легальные копии этой коммерческой операционной системы, а оставшаяся часть

$$1 - q(t) = \frac{p(t)}{\beta(y(t))}$$

новых пользователей бесплатно скачает копию некоммерческого продукта *Linux*.

Из формул (12.4.1)—(12.4.3) следует, что

$$\begin{aligned} y(t) &= n_w(t) - sn_L(t) = \int_0^t a q(\tau) d\tau - s \int_0^t a (1 - q(\tau)) d\tau = \\ &= \int_0^t a (q(\tau) - s(1 - q(\tau))) d\tau = \int_0^t a ((1 + s)q(\tau) - s) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь задача оптимального управления, стоящая перед *Microsoft*, принимает следующий вид: так изменять цену лицензии  $c(t)$  во времени, чтобы обеспечить себе максимум интегрального дисконтированного (по непрерывной ставке  $\delta$ ) дохода

$$J = \int_0^{+\infty} a q(t) p(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max \quad (12.4.14)$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = a((1 + s)q(t) - s); \quad (12.4.15)$$

$$q(t) = 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))}; \quad (12.4.16)$$

$$p(t) \geq 0; \quad (12.4.17)$$

$$\beta(y(0)) > 0. \quad (12.4.18)$$

**УСЛОВИЯ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ КОММЕРЧЕСКОГО И НЕКОММЕРЧЕСКОГО ПРОДУКТОВ.** *Коммерческий и некоммерческий продукт сосуществуют на рынке тогда и только тогда, когда  $s > 1$ , при этом оптимальная цена лицензии и мгновенная прибыль производителя коммерческого продукта меньше, чем на монопольном рынке коммерческого продукта.*

**Доказательство.** Очевидно, в случае  $s \leq 1$  предпочтения пользователей таковы, что операционная система *Linux* даже не смогла бы начать распространяться, поскольку все пользователи предпочитали бы устанавливать *Windows*. Исследуем более сложный случай  $s > 1$ .

Подставляя выражение  $q(t)$  из (12.4.16) в (12.4.15) и (12.4.14), преобразуем задачу (12.4.15)—(12.4.18):

$$J = \int_0^{+\infty} a \left( 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))} \right) p(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max$$

при условиях

$$\frac{dy}{dt} = a \left( (1+s) \left( 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))} \right) - s \right);$$

$$p(t) \geq 0;$$

$$\beta(y(0)) > 0.$$

Составим гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= a \left( 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))} \right) p(t) e^{-\delta t} + m(t) e^{-\delta t} a \left( (1+s) \left( 1 - \frac{p(t)}{\beta(y(t))} \right) - s \right) = \\ &= a e^{-\delta t} \left( p(t) + m(t) - \frac{p(t)(p(t) + (1+s)m(t))}{\beta(y(t))} \right) \end{aligned}$$

[здесь  $m(t)e^{-\delta t}$  — сопряженная переменная].

**Экономический смысл сопряженной переменной** выражается следующим образом:  $m(t)$  равна современной ценности прироста интегрального дисконтированного дохода *Microsoft* в результате усиления предпочтения пользователями брэнда *Windows* брэнду *Linux* [т. е. в результате увеличения на единицу величины  $y(t) = n_w(t) - sn_L(t)$ ].

Условия принципа максимума Понтрягина для данной задачи имеют следующий вид:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow p(t) = \frac{\beta(y(t)) - (1+s)m(t)}{2}; \quad (12.4.19)$$

$$\frac{d(m(t)e^{-\delta t})}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a\beta'(y(t))p(t)(p(t) + (1+s)m(t))}{\beta^2(y(t))}; \quad (12.4.20)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(m(t)e^{-\delta t})} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = a \left( 1 - \frac{(1+s)p(t)}{\beta(y(t))} \right). \quad (12.4.21)$$

Подставляя выражение  $c(t)$  из (12.4.19) в (12.4.20) и (12.4.21), получаем соответственно:

$$\frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a\beta'(y(t))(\beta^2(y(t)) - (1+s)^2 m^2(t))}{4\beta^2(y(t))}; \quad (12.4.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a((1-s)\beta(y(t)) + (1+s)^2 m(t))}{2\beta(y(t))}. \quad (12.4.23)$$

Определим стационарные состояния системы дифференциальных уравнений (12.4.22)—(12.4.23) как решения  $(m; y)$  соответствующей системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{dm}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta m = \frac{a\beta'(y)(\beta^2(y) - (1+s)^2 m^2)}{4\beta^2(y)}, \\ \frac{a((1-s)\beta(y) + (1+s)^2 m)}{2\beta(y)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1+s)^2 m^2 + \frac{4\delta\beta^2(y)}{a\beta'(y)} m - \beta^2(y) = 0, \\ m = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\beta(y)(-2\delta\beta(y) \pm \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2})}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, возможны два случая:

$$\begin{cases} m = \frac{\beta(y)(-2\delta\beta(y) + \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2})}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \quad (12.4.24)$$

и

$$\begin{cases} m = \frac{\beta(y)(-2\delta\beta(y) - \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2})}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases} \quad (12.4.25)$$

Система (12.4.24) имеет два решения:

- $(m = 0; y = y^\circ)$ , где  $y^\circ$  — решение уравнения

$$\tilde{\alpha}_w(y) = \tilde{\alpha}_L(y):$$

поскольку  $\beta(y^\circ) = 0$ , правые части обоих уравнений системы (12.4.24) при  $y = y^\circ$  обращаются в нуль;

- $(m = \hat{m}; y = \hat{y})$ , где  $\hat{y}$  — решение уравнения

$$\frac{\beta'(y)}{\beta(y)} = \frac{\delta(s-1)}{as}, \quad (12.4.26)$$

которое получается путем упрощения уравнения

$$\frac{\beta(y) \left( -2\delta\beta(y) + \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2} \right)}{a(1+s)^2\beta'(y)} = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2},$$

а

$$\hat{m} = \frac{(s-1)\beta(\hat{y})}{(1+s)^2}. \quad (12.4.27)$$

Анализ фазовой диаграммы, построенной на рис. 12.4.2, показывает, что стационарное состояние  $(m = 0; y = y^\circ)$  является неустойчивым, а стационарное состояние  $(m = \hat{m}; y = \hat{y})$  — устойчивым.

На всех траекториях, ведущих в устойчивую стационарную точку  $(m = \hat{m}; y = \hat{y})$ , выполняется достаточное условие оптимальности Мангасаряна, поэтому все они являются оптимальными.

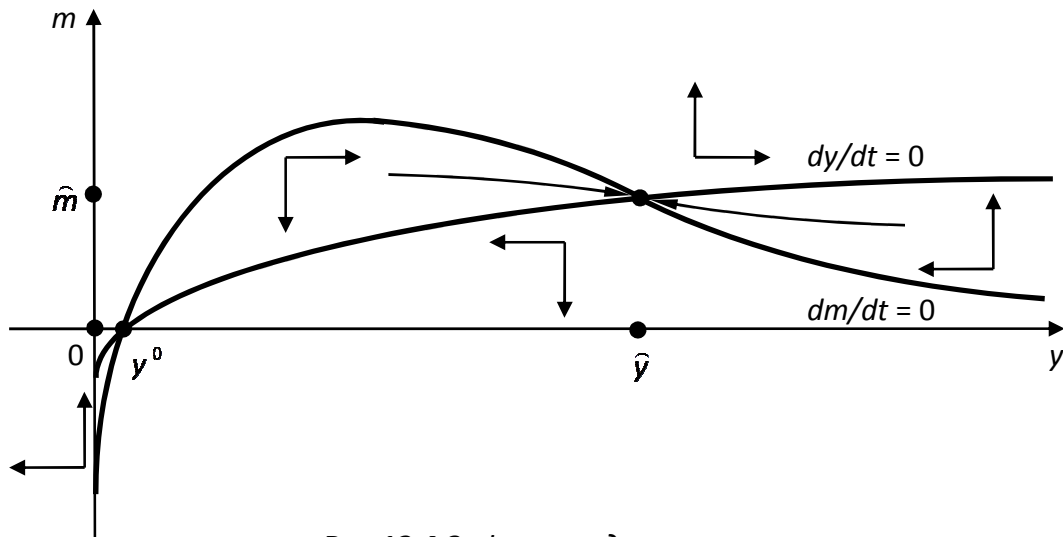


Рис.12.4.3. Фазовая диаграмма

Система (12.4.25) имеет единственное решение  $(m = 0; y = y^\circ)$ , но на всех траекториях, ведущих в эту устойчивую стационарную точку, сопряженная переменная (т. е. современная ценность прироста интегрального дисконтированного дохода *Microsoft* в результате усиления предпочте-

ния пользователями бренда *Windows* бренду *Linux*) отрицательна, в силу чего эти траектории не могут быть оптимальными.

Подставляя (12.4.27) в (12.4.19) и переходя к пределу при  $t \rightarrow +\infty$ , определяем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p^*(t) = \frac{\beta(\hat{y})}{1+s} < \frac{\bar{\alpha}_w}{2}; \quad (12.4.28)$$

так как  $\beta(\hat{y}) < \bar{\alpha}_w$ ,  $s > 1$ .

Переход к пределу в выражении  $q^*(t)$  (12.4.16) с подстановкой  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p^*(t)$  из (12.4.28) дает

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q^*(t) = \frac{s}{1+s} > \frac{1}{2};$$

так как  $\beta(\hat{y}) < \bar{\alpha}_w$ ,  $s > 1$ .

Мгновенная прибыль при этом равна

$$\pi^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} (aq^*(t)p^*(t)) = \frac{as\beta(\hat{y})}{(1+s)^2} < \frac{a\bar{\alpha}_w}{4}.$$

Утверждение полностью доказано.  $\square$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Найдите оптимальное управление в задаче

$$\int_0^T u^2(t) dt + T \rightarrow \min,$$

$$\frac{dx}{dt} = u(t) - c(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

2. Найдите оптимальное управление в задаче

$$\int_0^T x(t)(1-u(t)) dt + T \rightarrow \max,$$

$$\frac{dx}{dt} = (u(t) - \tilde{u})x(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

3. Найдите решение простейшей задачи оптимального управления потреблением

$$\int_0^T c(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max,$$

$$\frac{dw}{dt} = \beta w(t) - c(t), \quad w(0) = w_0,$$

$$0 \leq c(t) \leq w(t).$$

Здесь  $w(t)$  — богатство потребителя,  $c(t)$  — потребление,  $\delta$  — ставка дисконтирования,  $\beta$  — коэффициент прироста богатства.

4. Найдите оптимальное потребление в модели Рамсея

$$\int_0^T u(c(t)) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max,$$

$$\frac{dw}{dt} = \beta w(t) - c(t), \quad w(0) = w_0, \quad w(T) = 0,$$

$$0 \leq c(t) \leq w(t)$$

в случае, когда функция полезности  $u(c)$  имеет вид: а)  $u(c) = \ln c$ ; б)  $u(c) = c^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002.
2. *Карандаев И. С., Малыхин В. И., Соловьев В. И.* Прикладная математика. М.: ИНФРА-М, 2002.
3. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Колемаев В. А., Малыхин В. И., Соловьев В. И. и др.* Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.
5. *Колемаев В. А., Соловьев В. И., Малыхин В. И. и др.* Практикум по исследованию операций в экономике. М.: Вега-Инфо, 2010.
6. *Малыхин В. И.* Высшая математика. М.: ИНФРА-М, 2004.
7. *Малыхин В. И.* Математическое моделирование экономики. М.: Издательство УРАО, 2002.
8. *Малыхин В. И.* Экономико-математическое моделирование налогообложения. М.: Высшая школа, 2006.
9. *Соловьев В. И.* Стратегия и тактика конкуренции на рынке программного обеспечения: Опыт экономико-математического моделирования. М.: Вега-Инфо, 2010.
10. *Соловьев В. И.* Финансы предприятий и домашних хозяйств. – М.: Вега-Инфо, 2010.
11. *Соловьев В. И.* Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. М.: Вега-Инфо, 2009.
12. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике. М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2011.

*Учебное издание*

**Владимир Игоревич Соловьев**

**МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**

Учебное пособие